Astérisque

JØRGEN CHERLY

Sommes d'exponentielles cubiques dans l'anneau des polynomes en une variable sur le corps à 2 éléments, et application au problème de Waring

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 83-96

http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__83_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOMMES D'EXPONENTIELLES CUBIQUES DANS
L'ANNEAU DES POLYNOMES EN UNE VARIABLE
SUR LE CORPS A 2 ELEMENTS, ET APPLICATION
AU PROBLEME DE WARING**

par

Jørgen CHERLY

En 1770, Waring a énoncé que tout nombre entier (positif) est somme de 4 carrés, 9 cubes, 19 bicarrés. Quelques années plus tard, il a étendu son affirmation au cas des puissances supérieures ; c'était le début d'une longue succession de variations sur le thème.

Bien que la touche finale du problème original ait été donnée - encore est-ce tout récemment en 1986, par les efforts conjoints de Balasubramanian, Deshouillers et Dress que le problème de Waring pour les bicarrés a été résolu - de nombreuses questions restent encore en suspens.

L'une des variantes consiste à étudier l'ensemble des sommes de puissances k -ièmes dans l'anneau $\mathbb{F}_q[X]$ des polynômes en une indéterminée sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, anneau qui partage de nombreuses propriétés arithmétiques avec $\mathbb{Z}$. Les travaux de Matthews (1966), Kubota (1971) et Car (1971) conduisent à des résultats dont nous citons le dernier en date, qui est le meilleur possible concernant les restrictions imposées aux degrés des termes.

Tout élément M de $\mathbb{F}_q[X]$ de degré suffisamment grand peut s'écrire sous la forme

$$M = M_1^k + \cdots + M_s^k$$

où $s = \min(k2^{k-1} + 1, 2[k(k-1) \log 2] + 2k + 3)$ et $\deg M_i < \frac{1}{k} \deg M + 1$, à la condition que k soit inférieur à la caractéristique de $\mathbb{F}_q$.

Ce travail a pour but d'apporter une première pierre à l'étude du cas où le degré est supérieur à la caractéristique de $\mathbb{F}_q$. Nous montrons le résultat suivant :

THÉORÈME I : *Tout élément M de $\mathbb{F}_2[X]$ de degré assez grand qui est congru à 0 ou 1 modulo $1 + X + X^2$ est somme d'au plus 18 cubes de polynômes de degré inférieur à $\frac{1}{3} \deg M + 1$.*

On remarque que la condition de congruence est indispensable, car toute somme de cubes dans $\mathbb{F}_2[X]$ est congrue à 0 ou 1 modulo $1 + X + X^2$. Le résultat a surtout une importance qualitative (nombre de termes finis) la valeur 18 n'est sûrement pas la meilleure possible.

La démonstration s'effectue en deux étapes ; la première partie, qui nous semble avoir un intérêt intrinsèque est l'estimation de sommes trigonométriques. La seconde partie est plus standard. On y met en oeuvre la "méthode du cercle" adaptée à l'anneau $\mathbb{F}_q[X]$ en suivant Carlitz. Pour cela, on introduit un caractère E sur le complété $\mathbb{F}_q((\frac{1}{X}))$ de $\mathbb{F}_q[X]$; le nombre de représentations de M en somme de s cubes prend une expression intégrale

$$R_s(M) = \int \left(\sum_{\deg B \leq n} E(B^3 t) \right)^s E(-Mt) dt$$

étendue à la boule unité de $\mathbb{F}_q((\frac{1}{X}))$.

Le traitement traditionnel des "arcs mineurs" par la méthode de Weyl s'avère inefficace, car il repose sur des différentiations successives et introduit un facteur $3!$ qui est nul dans $\mathbb{F}_2$. On a recours au traitement suggéré par Vaughan en 1977 dans le cas archimédien. La difficulté que l'on rencontre dans le cas présent est l'impossibilité d'utiliser une quelconque variété de la méthode de la phase stationnaire ; en effet, les termes résiduels qui interviennent dans la formule sommatoire de Poisson, loin d'être négligeable, peuvent avoir un ordre de grandeur maximal, comme nous le montrons. Dans la première partie nous prouvons également que peu de ces termes sont en fait non nuls. On obtient ainsi l'équivalent du lemme de Weyl.

THÉORÈME II : Il existe un réel K tel que, pour tout couple de polynômes G et H premiers entre eux ($H \neq 0$), pour tout entier n et tout $u \in \mathbb{F}_2((\frac{1}{X}))$ vérifiant $n + \deg H < v(u) \leq 2n + \deg H$ on ait

$$\left| \sum_{B \in \mathbb{F}_2[X], \deg B \leq n} E(B^3(\frac{G}{H} + u)) \right| \leq K \cdot 2^{\frac{19}{20}n}$$

où $v(u)$ désigne la valuation de u .

Commentaire.

La constante K peut être explicitée : $K = 2^{2^{540}}$ convient. La méthode utilisée ne permet pas d'obtenir l'exposant $\frac{3}{4}$ du cas archimédien au lieu de $\frac{19}{20}$; sa limite théorique, atteinte dans plusieurs cas, est $\frac{5}{6}$.

Remarque : L'intérêt du résultat provient de ce que tout élément t de $\mathbb{F}_2((\frac{1}{X}))$ peut s'écrire sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} t = \frac{G}{H} + u. \text{ avec } (G, H) = 1, 0 \leq \deg H \leq n \\ \text{(et } v(u) > n + \deg H) \end{cases}$$

et que la somme

$$\sum_{B \in \mathbb{F}_2[X], \deg B \leq n} E(B^3(\frac{G}{H} + u))$$

notée $S_n(t)$ peut être calculée explicitement si $v(u) > 2n + \deg H$.

PREMIERE PARTIE : Une inégalité du type de celle de Weyl pour les sommes trigonométriques cubiques dans $\mathbb{F}_2((\frac{1}{X}))$

a) Notation

On note $\mathbb{F}_2((\frac{1}{X}))$ le complété du corps $\mathbb{F}_2(X)$ des fractions rationnelles en une indéterminée sur $\mathbb{F}_2$, pour la valuation 0-adique v telle que $v(\frac{A}{B}) =$

$\deg B - \deg A$ lorsque A et B sont des polynômes non nuls. Un élément non nul u de $F_2((\frac{1}{X}))$ peut être représenté comme un série de Laurent

$$\sum_{m=-\infty}^{-v(u)} u_m X^m, \text{ où } u_m \in F_2.$$

A la valuation v est associée la valeur absolue $|\cdot|$ telle que pour tout u dans $F_2((\frac{1}{X}))$, on ait $|u| = 2^{-v(u)}$.

On note E le caractère du groupe additif $F_2((\frac{1}{X}))$, défini par

$$E(\sum u_m X^m) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{-1} = 0 \\ -1 & \text{si } u_{-1} = 1. \end{cases}$$

Pour tout entier n , on note $\mathcal{P}_n$ le groupe additif compact des éléments de $F_2((\frac{1}{X}))$ de valuation supérieure à n .

On note dt la mesure de Haar normalisée sur la boule unité $\mathcal{P}_0$; que l'on notera également $\mathcal{P}$.

b) Un lemme sur les sommes trigonométriques cubiques dans $F_2((\frac{1}{X}))$

Pour un entier positif k , notons g_k l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à k .

LEMME 1 : Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F_2((\frac{1}{X}))$ et $\phi(y) = \alpha y^3 + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y + \alpha_3$, $y \in F_2((\frac{1}{X}))$ nous obtenons la relation

$$\left| \sum_{B \in g_k} E(\phi(B)) \right|^4 = \left| \sum_{B \in g_k} E(\phi(B)) \right|^2 \sum_{R \in g_k} \sum_{Q \in g_k} E(\alpha(R^2 Q + RQ^2)).$$

c) Formule sommatoire de Poisson et sommes de Gauss

Soit $t = \frac{G}{H} + u$ un élément de $F_2((\frac{1}{X}))$ satisfaisant (1) et la condition (2) suivante

$$(2) \quad v(u) \leq 2n + \deg H .$$

On définit la fonction f par la relation

$$(3) \quad f(\eta) = \begin{cases} E(\eta^3 H^3 u) & \text{si } v(\eta) \geq \deg H - n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$