PAULA COHEN
JÜRGEN WOLFART

Monodromie des fonctions d'Appell, variétés abéliennes et plongement modulaire

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 97-105
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__97_0>

MONODROMIE DES FONCTIONS D'APPELL, VARIETES ABELIENNES ET PLONGEMENT MODULAIRE

par

Paula COHEN et Jürgen WOLFART

1. Les groupes de Picard-Terada-Mostow-Deligne

Soient $0 < \mu_0, \ldots, \mu_4 < 1$ des nombres rationnels avec le dénominateur plus petit commun $d > 2$ satisfaisant à la condition

$$\sum_j \mu_j = 2 \tag{1}$$

Alors pour tout $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$,

$$\omega := u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}(u-x)^{-\mu_2}(u-y)^{-\mu_3} du = \frac{du}{w} \ .$$

définit une différentielle holomorphe sur une courbe projective non-singulière $X(x, y)$ dont un modèle affine s'écrit

$$w^d = u^{d\mu_0}(u-1)^{d\mu_1}(u-x)^{d\mu_2}(u-y)^{d\mu_3}. \tag{2}$$

Comme fonction de x et y, chaque période de ω satisfait à un système d'équations différentielles partielles linéaires dont on peut choisir les trois solutions de base comme des périodes de ω, par exemple

$$\int_{\gamma_0} \omega \ , \ \int_{\gamma_1} \omega \ , \ \int_{\gamma_2} \omega \ ,$$

où les γ_i sont des cycles sur $X(x, y)$, décrits par leurs projections sous $(u, w) \mapsto u$ (ramifié en $0, 1, x, y, \infty$) comme des cycles de Pochhammer autour des paires 1 et ∞, 1 et 0, 1 et x respectivement, en évitant des points de ramification. En effet, à un facteur cyclotomique et un dénominateur $B(1-\mu_1, 1-\mu_4)$ près, $\int_{\gamma_0} \omega$ est une fonction hypergéométrique $F_1(x,y)$ d'APPELL [AK]. Le système d'EDP a ses singularités (régulières, voir e.g. [Y]) dans les *surfaces caractéristiques* $x = y$ et $x, y = 0, 1, \infty$. Le prolongement analytique suivant les cycles dans l'espace des points réguliers définit par représentation du groupe fondamental sur l'espace des solutions *le groupe de monodromie affine* $\Delta_0 \subset GL_3\mathbf{C}$ et *projectif* $\Delta \subset PGL_3\mathbf{C}$. Sous ces hypothèses on obtient le

THÉORÈME ([P], [TE 1,2],[DM],[M], [Y]). *L'application*

$$\Psi : \begin{cases} \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 - \{(x,y) \mid x = y \text{ ou } x, y = 0, 1, \infty\} \longrightarrow \mathbf{P}_2 \\ (x,y) \longmapsto \left(\int_{\gamma_0} \omega, \int_{\gamma_1} \omega, \int_{\gamma_2} \omega\right) \end{cases}$$

définit une application localement biholomorphe et $PGL_3\mathbf{C}$-multivalente sur une partie dense d'une boule projective $B \subset \mathbf{P}_2$, donnée par $|\alpha_1 z_1|^2 + |\alpha_2 z_2|^2 < |z_0|^2$ avec des constantes algébriques $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. Le groupe de monodromie Δ opère sur B, et si l'on a pour tout $i \neq j \in \{0,1,2,3,4\}$

$$(3) \qquad (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \begin{cases} \in \ \frac{1}{2}\mathbf{Z} \cup \{\infty\} & \text{si } \mu_i = \mu_j \\ \in \ \mathbf{Z} & \text{sinon,} \end{cases}$$

Δ opère comme groupe discontinu sur B.

A des permutations des μ_j près, on obtient comme cela 49 groupes discontinus Δ que nous appelons *les groupes de Picard-Terada-Deligne-Mostow (PTDM)* en tenant compte du fait qu'une version faible du Théorème déjà formulée par PICARD est démontrée sous cette forme faible par TERADA et en cette version-ci par DELIGNE-MOSTOW et MOSTOW. Une autre démonstration -utilisant des travaux de HIRZEBRUCH et HÖFER sur les revêtements des surfaces algébriques, sous une condition plus restrictive que (3)- est donnée par YOSHIDA. Parmi ces 49 groupes, il y en a 15 qui ne sont pas arithmétiquement définis. Il existe une extension du Théorème à la situation en plus de deux variables (les fonctions de LAURICELLA), mais nous nous bornons ici aux groupes de *PTDM* $\Delta \subset PGL_3\mathbf{C}$.

Par continuité, Ψ s'étend sur les surfaces caractéristiques hors de leurs intersections ; cette extension contracte e.g. la surface $x = 0$ (pour $y \neq 0$) en des points de la boule si $\mu_0 + \mu_2 > 1$ et en des points au bord de la boule (des pointes de Δ) si $\mu_0 + \mu_2 = 1$. Mais Ψ ne s'étend pas e.g. au point $x = y = 0$

si $\mu_0 + \mu_2 + \mu_3 > 1$, donc l'espace naturel pour la définition de Ψ n'est pas $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. D'autre part, on peut traiter les points de ramification $0,1,x,y,\infty$ de façon équivalente en les remplaçant par $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, la différentielle ω par

$$\prod_{j=0}^{4} (u - x_j)^{-\mu_j} du =: \omega'.$$

Finalement, le bon espace de définition pour Ψ sera donc l'espace des *points stables* [DM]

$$\begin{aligned} Q_{st} = \{&(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{P}^1)^5\} \\ &- \{(x_0, \ldots, x_4) \mid \exists i \neq j \textit{ avec } x_i = x_j \textit{ et } \mu_i + \mu_j \geq 1\} \\ &- \{(x_0, \ldots, x_4) \mid \exists i, j, k \textit{ deux à deux distincts} \\ &\qquad\qquad \textit{avec } x_i = x_j = x_k \textit{ et } \mu_i + \mu_j + \mu_k \geq 1\} \\ &- \{(x_0, \ldots, x_4) \mid \textit{ quatre coordonnées coïncident } \} \\ &\textit{modulo l'action diagonale de } PSL_2\mathbb{C} \textit{ sur } (\mathbb{P}^1)^5. \end{aligned}$$

L'espace Q_{st} porte une structure complexe naturelle, et même après l'adjonction d'un nombre fini de points *semi-stables* correspondant aux pointes de Δ, la structure d'une variété algébrique projective (plus précisément, d'un $\mathbb{P}_2$ éclaté en au plus quatre points en position générale). Localement, on peut normaliser Q_{st} par l'action de $PSL_2\mathbb{C}$ de telle façon que trois des x_j prennent les valeurs $0,1,\infty$; si l'on désigne les deux autres par x et y, on retrouve donc les définitions données au début. Mais globalement, on considère maintenant dix surfaces caractéristiques $S(ij)$ données par $x_i = x_j$; si $\mu_i + \mu_j < 1$, nous désignons par $S_{st}(ij)$ la partie stable $S(ij) \cap Q_{st}$, tandis que $S_{st}(ijk)$ désigne le point $x_i = x_j = x_k$ de Q_{st} si $\mu_i + \mu_j + \mu_k < 1$. Dans tous les cas, Ψ s'étend par continuité comme application $PGL_3\mathbb{C}$-multivalente de Q_{st} *sur* B. L'extension sera appelée encore Ψ.

Remarquons enfin que la restriction de Ψ à une surface caractéristique stable $S_{st}(ij)$ est essentiellement composée de deux solutions de l'équation différentielle hypergéométrique de Gauss en une variable pour les périodes de $\omega'|_{x_i=x_j}$, dont le quotient est une application triangulaire. Le groupe de monodromie Δ_{ij} de cette application triangulaire est déterminé, comme Δ, par les périodes de ω : il ne faut que remplacer le quintuplet $(\mu_j)_{j=0,\ldots,4}$ par un quadruplet en remplaçant la paire μ_i, μ_j par la somme $\mu_i + \mu_j$. Ce procédé cadre avec les formules classiques pour la restriction des fonctions d'Appell $F_1(x, y)$ aux surfaces caractéristiques.

2. Le plongement modulaire dans les points réguliers

Le résultat principal de ce travail-ci dit que même les groupes de $PTDM$ non-arithmétiques sont étroitement liés à certains groupes arithmétiques :

THÉORÈME 1. *Soit Δ un groupe de PTDM. Alors il existe un groupe arithmétique Γ agissant sur une puissance B^m de la boule et un plongement modulaire qui consiste en une injection analytique*

$$F : B \hookrightarrow B^m$$

compatible à une injection de groupes

$$h : \Delta \hookrightarrow \Gamma$$

tel que $F(\gamma\tau) = h(\gamma)F(\tau)$ pour tout $\gamma \in \Delta$ et $\tau \in B$. Si l'on munit les espaces quotients compactifiés de leur structure naturelle de variétés projectives définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, l'application induite par F

$$\overline{\Delta \setminus B} \to \overline{\Gamma \setminus B^m}$$

est un morphisme défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Nous publierons les détails de la démonstration ailleurs, mais nous indiquons ici les idées principales pour expliquer le lien avec les variétés abéliennes et pour expliciter la construction de F. Pour les Ψ-images des points réguliers dans B, c'est une extension de la troisième construction dans [CoWo,§3]. Naturellement, pour les Δ arithmétiques on obtient $m = 1$ et des identités respectives pour F et h (e.g. dans le cas traité par [Ho]).

A chaque point régulier $(x, y) \in Q_{st} - \bigcup S(ij)$ on associe une variété abélienne $T(x, y)$ principalement polarisée contenue dans la Jacobienne $J(X(x, y))$. Les morphismes naturels de $X(x, y)$ sur des courbes $X_f(x, y)$ avec des modèles

$$w^f = u^{d\mu_0}(u-1)^{d\mu_1}(u-x)^{d\mu_2}(u-y)^{d\mu_3},$$

f un diviseur propre de d, induisent des morphismes m_f de $J(X(x, y))$ sur $J(X_f(x, y))$, et on prend pour $T(x, y)$ la composante connexe de 0 du noyau commun de ces m_f.

L'automorphisme $\chi : (u, w) \longmapsto (\zeta_d^{-1}u, w)$, $\zeta_d = e^{2i\pi/d}$, de $X(x, y)$ entraîne $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_d) \subset \mathrm{End}_0\, T(x, y) = \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}\, T(x, y)$, donc $T(x, y)$ admet des multiplications complexes par $\mathbb{K}$ avec un type de CM généralisé

$$\sum_{n \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*} r_n \sigma_n \ , \ \sigma_n \text{ les plongements } \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C} \text{ avec } \zeta_d \longmapsto \zeta_d^n \ ,$$

qui contient des informations sur l'action induite par $\mathbb{K}$ sur l'espace $H^0(T(x, y), \Omega)$ des différentielles de première espèce : $r_n = \dim V_n$ pour l'espace