

Astérisque

VALÉRIE BERTHÉ

**De nouvelles preuves « automatiques » de transcendance
pour la fonction zêta de Carlitz**

Astérisque, tome 209 (1992), p. 159-168

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__159_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__159_0)

© Société mathématique de France, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

De nouvelles preuves “automatiques” de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz

Valérie BERTHÉ

1 Introduction

Soit $\mathbf{F}_q$ le corps à q éléments, q étant une puissance entière strictement positive de p premier. On note $\mathbf{F}_q[x]$ l’anneau des polynômes à une indéterminée sur $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}_q(x)$ le corps des fractions rationnelles en x . Le complété de $\mathbf{F}_q(x)$ pour la valuation $(1/x)$ -adique, définie par $v(E) = -d^\circ E$, est le corps $\mathbf{F}_q((1/x))$ des séries formelles de Laurent, c’est-à-dire

$$\mathbf{F}_q((1/x)) = \{a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \dots ; a_n \in \mathbf{F}_q\}.$$

En 1935, Carlitz a défini une fonction ζ , à valeurs dans $\mathbf{F}_q((1/x))$, de la façon suivante :

$$\zeta(m) = \sum_{G \in \mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m, \quad m \geq 1.$$

La fonction ζ de Carlitz est l’analogie en caractéristique finie de la fonction ζ de Riemann. Carlitz a ainsi établi dans [4] que, pour s divisible par $(q-1)$, $\zeta(s)/\Pi^s \in \mathbf{F}_q(x)$, avec

$$\Pi = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}\right).$$

Cette propriété est l’équivalent du résultat d’Euler sur les valeurs paires de la fonction ζ de Riemann, à savoir $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ est rationnel pour n non nul. Notons que le groupe des unités de $\mathbf{F}_q[x]$ est $\mathbf{F}_q^*$, d’ordre $q-1$, alors que le groupe multiplicatif de $\mathbf{Z}$ est de cardinal 2. Les congruences modulo 2 dans le cas complexe sont remplacées ici par des congruences modulo $q-1$.

En 1941, Wade prouve dans [12] la transcendance de Π sur $\mathbf{F}_q(x)$. On en déduit la transcendance de $\zeta(s)$ pour $s \equiv 0 \pmod{q-1}$, (valeurs “paires” de s). En 1986-87, Thakur établit dans [11] des résultats d’irrationalité pour $1 \leq s \leq q^2$ alors que Dammame montre l’irrationalité de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q$, ([7]). En 1988, Dammame et Hellegouarch prouvent la transcendance de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q^2$ par la méthode de Wade, ([10]). Enfin, en 1989, Dammame établit dans [8], voir aussi [9], la preuve de la transcendance de $\zeta(s)$ pour tout s . Parallèlement, Yu prouve en 1988, par une méthode utilisant les modules de Drinfeld, que pour tout entier s non nul, $\zeta(s)$ est transcendant et pour tout entier s non divisible par $q-1$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant, (la preuve est parue dans [13]).

Par ailleurs, en 1989, Allouche donne dans [2] une preuve “élémentaire” de la transcendance de Π , c’est-à-dire qui utilise le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, (voir [5]), énoncé ci-dessous :

THÉORÈME 1 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy)

Soit $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. Il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :

- 1) *la série formelle $\sum_{n \geq 0} u(n)x^{-n}$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$,*
- 2) *l’ensemble E des sous-suites de la suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ défini par*

$$E = \{(u(q^k n + r))_{n \in \mathbf{N}}; \quad k \geq 0; \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini,

- 3) *la suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est q -automatique.*

Seule l’équivalence entre les conditions 1 et 2 intervient dans nos preuves de transcendance. La condition 3 montre le lien qui existe entre le critère d’algébricité donné par la condition 2 et les automates. Rappelons, (voir [1] ou [6]), qu’un q -automate est défini par la donnée de :

- un ensemble fini d’états $S = \{i = a_1, a_2, \dots, a_d\}$, dont on a privilégié un élément i , appelé état initial,
- q applications ou “flèches” de l’ensemble des états S dans lui-même, notées $0, 1, \dots, q-1$,
- une application φ de S dans un ensemble Y , dite fonction de sortie.

Une suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans Y est dite q -automatique si elle est engendrée par un q -automate de la façon suivante: considérons un entier n , écrivons-le en base q en identifiant les chiffres de son développement aux applications $0, 1, \dots, q-1$; en lisant les chiffres de n de droite à gauche, on obtient

une application composée de S dans lui-même. Soit a_f l'image de l'état initial i par cette application, on pose alors: $u(n) = \varphi(a_f)$.

Allouche étudie, en fait, le quotient α/Π , avec

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}\right).$$

Notons que α est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, il suffit de considérer α^q pour s'en convaincre.

M'inspirant du résultat d'Allouche, je donne ici une preuve "automatique" de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $1 \leq s \leq q-2$. Il est, en effet, intéressant de multiplier $\zeta(s)/\Pi^s$ par α^s . On obtient ainsi une expression simple des coefficients du développement en série formelle de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s$. L'étude des sous-suites de la forme $(u(q^k n + 1 + s(q + q^2 + \dots + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$, avec $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s = \sum_{n \geq 0} u(n) x^{-n},$$

montre qu'il existe un nombre infini de telles suites. On déduit alors du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les transcendances de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s$ et de $\zeta(s)/\Pi^s$, α étant algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$.

Je vais dans une première partie de cet article me restreindre au cas où $s = 1$, puis j'indiquerai comment généraliser la méthode employée au cas où s est dans l'intervalle $[1, q-2]$.

2 Preuve de la transcendance de $\zeta(1)/\Pi$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2 *Pour $q \neq 2$, $\zeta(1)/\Pi$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$.*

Thakur a établi dans [11] que, pour $1 \leq s \leq q$,

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{ks} \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{x^{q^j} - x} \right)^s.$$

On obtient alors:

$$\frac{\alpha}{\Pi} \zeta(1) = \frac{\alpha}{\Pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{x} \right)^{q+\dots+q^k} \prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x} \right)^{q^j-1} \right).$$

2.1 Quelques développements en série formelle

Pour appliquer le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, nous avons besoin du développement en série formelle de $\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1)$. On remarque que le produit

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)$$

intervient à la fois dans les expressions de $\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1) - 1)$ et de $\frac{\alpha}{\Pi}$, pour $k = 0$. Considérons donc le développement en série formelle de

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)$$

On note que, si n s'écrit sous la forme

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i (q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

une telle décomposition est unique.

Par conséquent, soit $(a_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right) = \sum_{n \geq 0} a_k(n) x^{-n}$$

Si n s'écrit :

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i (q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a_k(n) = (-1)^{\sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i},$$

sinon $a_k(n) = 0$.

La proposition suivante correspond au cas où $k = 0$:

PROPOSITION 1 Soit $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \sum_{n \geq 0} a(n) x^{-n}$$

Si n s'écrit :

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k (q^k - 1) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a(n) = (-1)^{\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k},$$

sinon $a(n) = 0$.