Astérisque

DAVID HARARI

Groupe de Brauer de certaines hypersurfaces

Astérisque, tome 209 (1992), p. 203-214

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__203_0>

GROUPE DE BRAUER DE CERTAINES HYPERSURFACES

David HARARI

1. Rappels et notations

Dans toute la suite, k désignera un corps de nombres, Ω_k l'ensemble de ses places, $\bar{k}$ une clôture algébrique fixée de k, $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit X une k-variété algébrique lisse. On dit que X vérifie le principe de Hasse si la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique $X(k) \neq \emptyset$. On dit que X vérifie l'approximation faible si la condition $X(k) \neq \emptyset$ implique que $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$, muni de sa topologie produit, pour tout ensemble fini S inclus dans Ω_k.

Nous considérerons ici les hypersurfaces V de $\mathbf{A}_k^n$ d'équation:

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2}) \tag{1}$$

avec $n \geq 3$, $a \in k^* - k^{*^2}$ et P polynôme non nul de degré total au plus 4. On se pose deux types de problèmes pour ces variétés:

- problème arithmétique: Quand les modèles projectifs lisses X de V vérifient-ils le principe de Hasse et l'approximation faible (cette propriété ne dépend en fait pas du modèle lisse X choisi [1], c'est une propriété qui ne dépend que du corps des fonctions $k(V)$ de la variété V) ?
- problème algébrique: Calculer le groupe de Brauer $\mathrm{Br}\,X$ d'un modèle projectif lisse X de V.

Les deux problèmes sont liés par le fait suivant [2]:

[1] voir appendice 1

[2] voir appendice 2

Proposition 1. *Soit X une k-variété propre, lisse, géométriquement intègre, qui a des points dans tous les complétés de k. Alors, la condition:*

$$(\forall (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)) \quad (\exists A \in \operatorname{Br} X) \quad (\sum_{v\in\Omega_k} \operatorname{inv}_v A(P_v) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

$$(\text{resp. } (\exists A \in \operatorname{Br} X) \quad (\exists (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)) \quad (\sum_{v\in\Omega_k} \operatorname{inv}_v A(P_v) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\ )$$

est une obstruction, dite obstruction de Brauer-Manin, au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X.

La conjecture principale que nous faisons pour les modèles projectifs lisses X des variétés V d'équation (1) est que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule. Il s'agit d'une conjecture standard pour beaucoup de classes de variétés rationnelles (c'est à dire dont le corps des fonctions devient transcendant pur sur la clôture algébrique). Dans le cas que nous considérons ici, notons que Colliot-Thélène, Sansuc, et Swinnerton-Dyer ont montré que la réponse est affirmative quand le polynôme P qui intervient dans l'équation (1) est irréductible ou bien produit d'un facteur irréductible de degré 3 et d'un facteur linéaire, ou bien quand $n = 3$ (cf. [3]).

Nous considérerons dans la suite le cas où $n \geq 4$ et $P = fg$ avec f, g, irréductibles sur $k(\sqrt{a})$, de degré 2, premiers entre eux [3]. Si φ, ψ sont les formes quadratiques obtenues en homogénéisant f, g, nous supposerons toujours que l'intersection de leurs noyaux est réduite à 0, ce qui traduit qu'on ne peut pas, par changement de variables, se ramener à n plus faible.

2. Cas simples

Théorème 1. *Soit $V : y^2 - az^2 = f(x_1, \ldots, x_{n-2})g(x_1, \ldots, x_{n-2})$ une hypersurface du type (1). On garde les hypothèses et notations de la fin du paragraphe précédent. Alors, un modèle projectif lisse X de V satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible dans les cas suivants:*

- $n \geq 6$
- *$n = 5$ et toute forme du pinceau $\lambda\varphi + \mu\psi, (\lambda, \mu) \in \bar{k}^2 - (0,0)$ est de rang au moins 3.*

[3] Pour les autres cas, qui découlent assez simplement des résultats de [8], voir [5]

PREUVE: La variété V est k-birationnelle à:

$$Y : (y^2 - az^2)f(x_1, \ldots, x_{n-2}) = g(x_1, \ldots, x_{n-2})$$

Or, Y peut se voir comme fibrée en quadriques, via (y, z), au-dessus de $\mathbf{A}_k^2$.

- Pour $n \geq 6$, il y a deux cas:
  - Si le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ n'est pas identiquement nul, la fibre générique est lisse et les fibres sont des quadriques de dimension ≥ 3. On conclut alors avec le lemme suivant, que l'on trouve dans [3]:

    Lemme 1. *Soient Y, Z, deux k-variétés et $p : Y \to Z$ un fibré en quadriques de dimension relative $d \geq 3$. On suppose la fibre générique lisse. Alors, si Z_{lisse} vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible, il en est de même de Y_{lisse}.*

    PREUVE DU LEMME 1: La preuve de ce lemme est assez simple; soit $(P_v)_{v\in\Omega_k}$ une famille de points locaux lisses de Y, S un ensemble fini de places de k. Quitte à élargir S, on peut supposer qu'il contient toutes les places archimédiennes. Soit $M_v = p(P_v)$. On peut supposer que les M_v sont des points locaux lisses de Z (quitte à bouger légèrement les P_v, grâce au théorème des fonctions implicites v-adiques). Comme Z_{lisse} satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible, on peut trouver un point dans $Z_{\text{lisse}}(k)$, qui est en plus arbitrairement proche des M_v pour $v \in S$. Par le théorème des fonctions implicites, pour M assez proche des M_v pour $v \in S$, la fibre en M (qu'on note Y_M) aura des points dans tous les k_v tels que $v \in S$. Comme la fibre générique est lisse, on peut de plus supposer que Y_M est lisse. Maintenant, Y_M a des points dans tous les k_v pour $v \notin S$ car Y_M est une quadrique définie par l'annulation d'une forme quadratique de rang ≥ 5 et une telle forme quadratique a un zéro non trivial dans tout k_v pour v non archimédienne. Il ne reste plus alors qu'à appliquer principe de Hasse et approximation faible pour la quadrique Y_M pour démontrer le lemme.
  - Si maintenant le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ est identiquement nul, φ et ψ ont un point k-rationnel M commun (lemme 1.14 de [3]). Maintenant, la fibre générique admet M comme point rationnel non conique (à cause de l'hypothèse $N(\varphi) \cap N(\psi) = 0$), elle est donc birationnelle à $\mathbf{P}^{n-3}$ et Y est k-birationnelle à $\mathbf{P}_k^{n-3} \times \mathbf{A}_k^2$ (la projection sur $\mathbf{A}_k^2$ admettant une section via M). D'où le résultat.

- Dans le cas $n = 5$, il faut utiliser le lemme suivant, dont la preuve, que l'on peut trouver dans [9], est plus difficile:

  Lemme 2. *Soit Y une k-variété géométriquement intègre, $f : Y \to Z$ un morphisme projectif, surjectif dont les fibres sont géométriquement intègres, avec Z ouvert de $\mathbf{A}^r_k$ dont le complémentaire est de dimension au plus $r - 2$. On fait de plus l'hypothèse géométrique (*) que sur $\bar{k}$, $Y_{\eta,\text{lisse}}(\eta) \neq \emptyset$ pour un ouvert de Zariski non vide de la variété des droites affines de $\mathbf{A}^r$, $\eta \subset \mathbf{A}^r$ étant le plongement du point générique de $\mathbf{A}^1$ associé . Alors, si les fibres de f sur un ouvert de Z vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible, il en va de même de Y.*

  On applique alors ce lemme, quand le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ n' est pas identiquement nul, avec $Z = \mathbf{A}^2_k$. L'hypothèse (*) est automatiquement vérifiée d'après [9] car les fibres, sur un ouvert de Zariski non vide de Z, sont des quadriques lisses et toutes les fibres sont géométriquement intègres à cause de l'hypothèse que toute forme du pinceau $\lambda\varphi + \mu\psi, (\lambda, \mu) \in \bar{k}^2 - (0,0)$ est de rang au moins 3. Quand le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ est identiquement nul, le même argument de k-rationalité de Y que dans le cas $n \geq 6$ fonctionne encore.

REMARQUE: Pour les cas simples que recouvre le théorème 1, on n'a donc pas besoin de faire intervenir le groupe de Brauer de X: une méthode de fibration permet de résoudre directement le problème arithmétique.

3. Cas plus difficiles

Quand on n'est pas dans les cas favorables examinés dans la section précédente, on peut espérer traiter le problème arithmétique en utilisant des méthodes de descente, selon la théorie développée par Colliot-Thélène et Sansuc dans [4]. Il faut pour cela d'abord résoudre le problème algébrique du calcul de $\operatorname{Br} X$. C'est l'objet du théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $V : y^2 - az^2 = f(x_1, \ldots, x_{n-2})g(x_1, \ldots, x_{n-2})$ une hypersurface du type (1). On garde les hypothèses et notations de la fin du paragraphe 1. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors:*

- *Pour $n = 5$, $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = \mathbf{Z}/2$ s'il existe une forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$ du type (T), avec $(\lambda, \mu) \in k^2 - (0,0)$, telle que les restrictions de φ, ψ au noyau de Q soient encore du type (T). Sinon, $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$.*