JULIEN DUVAL

Surfaces convexes dans un bord pseudoconvexe

Astérisque, tome 217 (1993), p. 103-118
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__103_0>

SURFACES CONVEXES DANS UN BORD PSEUDOCONVEXE

Julien Duval.

1. INTRODUCTION

a) Enoncé des résultats.

On considère, dans ce texte, la question suivante : soit D un domaine relativement compact de $\mathbf{C}^2$, à bord, de classe C^2, strictement pseudoconvexe, et K un compact dans le bord de D ; quels critères géométriques assurent la convexité de ce compact par rapport à l'algèbre $\vartheta(\overline{D})$ des fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{D}$?

Cette notion de convexité intervient naturellement en analyse complexe dans deux types de problèmes :

- l'approximation de fonctions holomorphes : la convexité de K entraîne par le théorème d'Oka-Weil [8] que toute fonction holomorphe au voisinage de K est limite uniforme sur K de fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{D}$.

- l'extension de fonctions C.R. : la convexité de K équivaut au fait que toute fonction continue définie sur le complémentaire de K dans ∂D et satisfaisant l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle (au sens faible) s'étend en une fonction holomorphe dans D [11].

Les exemples connus de compacts convexes dans ∂D sont essentiellement des disques : dans [6], Jöricke montrait directement la propriété d'extension de fonctions C.R. pour tout disque totalement réel - i.e. nulle part tangents à une droite complexe - en analysant son feuilletage caractéristique.

Puis, dans [5], Forstneric et Stout généralisaient ce résultat à tout disque avec un nombre fini de points hyperboliques en utilisant le théorème de remplissage de sphères par des disques holomorphes de Bedford-Klingenberg [2].

Le but de cet article est de poursuivre, dans la lignée de Jöricke, l'étude de la convexité des surfaces dans un bord strictement pseudoconvexe en lisant directement sur le feuilletage caractéristique de la surface les contraintes sur son enveloppe convexe. Pour celà, précisons davantage les définitions.

L'enveloppe convexe $\widehat{K}$ d'un compact K contenu dans ∂D est l'ensemble des points x de D satisfaisant l'inégalité $|f(x)| \leq \operatorname{Sup}_K |f|$ pour toute fonction f de $\vartheta(\overline{D})$. Par exemple, tout disque holomorphe dans D s'appuyant sur K sera dans K par le principe du maximum. Le compact est dit *convexe* si $\widehat{K} = K$.

On s'intéresse surtout à *l'enveloppe essentielle* $\widehat{K}_{ess} = \overline{\widehat{K} \setminus K}$ et à sa *trace* sur le compact, $\widehat{K}_{ess} \cap K$. Par le principe du maximum local de Rossi [9], on sait que $\widehat{K}_{ess}$ est contenue dans l'enveloppe convexe de sa trace. La convexité de K est donc assurée si cette trace est convexe, a fortiori si elle est vide.

On se restreindra au cas des surfaces. On se fixe donc dans la suite une surface S de dimension réelle 2, compacte, lisse, à bord, connexe ou non, de classe C^2, contenue dans ∂D.

Regardons, en tout point de la surface, l'intersection du plan tangent à la surface avec l'unique droite complexe tangente au bord de D ; ces deux plans étant contenus dans l'hyperplan tangent à ∂D, on obtient en général une droite réelle tangente à la surface sauf aux points où le plan tangent à la surface coïncide avec cette droite complexe, les points dits *complexes*.

De cette manière, on décrit sur S un champ de directions avec singularités, que l'on intègre en un feuilletage de dimension 1 et de classe C^1 avec singularités, le *feuilletage caractéristique* de la surface.

Les points complexes d'une surface générique sont isolés et de deux types, *elliptique* ou *hyperbolique* [3]. On peut les distinguer par le feuilletage caractéristique qui dessinera un foyer près d'un point elliptique et une selle près d'un point hyperbolique (cf. Fig.1). Un point elliptique sera toujours un obstacle à la convexité car il fait germer des petits disques holomorphes s'appuyant sur la surface [3]. On ne traitera donc que des surfaces sans point elliptique.

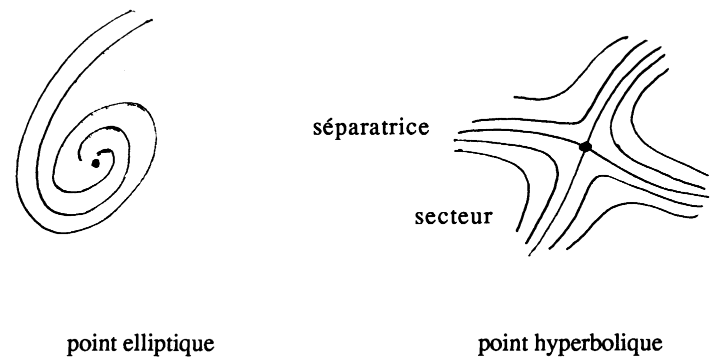

Fig. 1. Feuilletage caractéristique près des points complexes génériques.

Dans le cas particulier où l'enveloppe de S possède de la structure analytique, par exemple s'il existe un disque holomorphe dans D à bord tracé sur la partie totalement réelle de la surface, on sait que le bord de ce disque est transverse au feuilletage caractéristique. En effet, ce disque ne peut avoir un contact de l'intérieur avec le bord du domaine par stricte pseudoconvexité. De même, si un disque holomorphe qui s'appuie sur la surface touche un point hyperbolique, on sait dans certains cas (cf. [2]) que son bord doit traverser au moins une séparatrice issue de ce point.

Le résultat central de ce texte étend ces remarques à l'enveloppe essentielle.

b) Commentaires et exemples.

- Discutons d'abord le corollaire 1 pour les anneaux.

Considérons pour celà un tore dans ∂D dont le feuilletage caractéristique est défini par les niveaux réguliers d'une application f à valeurs dans le cercle S^1; autrement dit ce feuilletage est une fibration en cercles sur le cercle. Soit maintenant un compact K dans ce tore tel que $f_*(\pi_1(K)) = 0$, par exemple un anneau dont l'âme est homologue aux cercles caractéristiques. Alors f se relève au voisinage de K en une fonction à valeurs réelles via l'exponentielle, et K est donc convexe par le corollaire 1.

On peut fabriquer des exemples de tels tores dans S^3 en prenant la préimage d'une courbe fermée dans S^2 par la fibration de Hopf. On vérifie que leurs feuilles caractéristiques sont toutes des cercles, ou toutes denses.

- Regardons maintenant le tore standard $|z| = |w| = 1$ dans les bords de la famille d'ellipsoïdes d'équations $q|z|^2 + p|w|^2 = p + q$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux. On obtient une famille de feuilletages caractéristiques en cercles translatés du cercle paramétré par $z \longmapsto (z^p, z^{-q})$ pour $|z| = 1$. D'après ce qui précède, tout anneau sur le tore standard dont l'âme est homologue à l'un de ces cercles sera convexe par rapport aux fonctions holomorphes définies au voisinage de l'ellipsoïde correspondant, donc par rapport aux polynômes puisque l'ellipsoïde l'est. On retrouve ainsi le résultat d'Alexander [1].

- Par contre, un anneau à feuilletage caractéristique radial ne rentre pas dans le cadre du corollaire 1. Et, de fait, on construit des exemples non convexes de tels anneaux en collant un petit ruban totalement réel dans ∂D le long d'une courbe bordant un disque holomorphe à l'intérieur de D.

De même, ce corollaire ne s'applique pas à un anneau totalement réel présentant un cycle limite. Dans ce cas également, on peut construire des exemples non convexes de tels anneaux bordant un anneau holomorphe à l'intérieur de D.