Astérisque

FRANÇOIS BERTELOOT

Un principe de localisation pour les domaines faiblement pseudoconvexes de C^2 dont le groupe d'automorphismes holomorphes n'est pas compact

Astérisque, tome 217 (1993), p. 13-27

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__13_0>

Un principe de localisation pour les domaines faiblement pseudoconvexes de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes holomorphes n'est pas compact.

François Berteloot

1 Introduction

Considérons un domaine borné de $\mathbf{C}^n$ dont le groupe d'automorphismes analytiques, $\mathrm{Aut}(\Omega)$, n'est pas compact : cela revient à supposer l'existence d'un point ζ situé sur la frontière de Ω et adhérent à une orbite de $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

En généralisant un résultat de B. Wong [19], J.P. Rosay a montré que si la frontière de Ω est de classe C^2 et strictement pseudoconvexe en ζ, alors Ω est biholomorphiquement équivalent à la boule unité de $\mathbf{C}^n$ [18]. Une telle caractérisation de Ω par la géométrie de sa frontière au voisinage de ζ, lorsque ζ est un point de faible pseudoconvexité, ne semble possible qu'au prix d'hypothèses supplémentaires. Ainsi, suivant une voie inaugurée par R.E. Greene et S. G. Krantz, plusieurs auteurs supposent que Ω coïncide avec un "domaine modèle" au voisinage de ζ ([7, 12, 14, 15, 16]).

La méthode de dilatation des coordonnées [17], introduite par S. Pincuk, s'est avérée être un outil puissant pour l'étude de ces questions. Elle permit à E. Bedford et S. Pincuk de caractériser les domaines bornés pseudoconvexes de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes analytiques est non compact et la frontière globalement lisse et de type fini [2]. Ces mêmes auteurs ont récemment généralisé leurs résultats à certains domaines de $\mathbf{C}^n$, $n > 2$ ([3, 4]).

Cependant, lorsque la frontière de Ω n'est supposée régulière qu'au voisinage de ζ, la méthode de dilatation pose de délicats problèmes de familles normales. Ces difficultés furent surmontées dans un travail commun à G. Cœuré et l'auteur [8], où l'on caractérisait l'effet attractif exercé sur les disques analytiques par une hypersurface de type fini de $\mathbf{C}^2$. On y montrait alors que, lorsque Ω est un domaine de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini en ζ, Ω est biholomorphiquement équivalent à un domaine modèle $\Omega_P = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re} w + P(z) < 0\}$ où P est un polynôme réel, sous-harmonique et sans termes harmoniques.

L'objet de cette étude est de déterminer le polynôme P. En l'exprimant à l'aide des dérivées de la forme de Levi du bord de Ω en ζ, nous obtenons un analogue du théorème de Rosay pour un domaine Ω dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini en ζ (cf. théorème 2.1). Nous en déduisons un "principe de localisation" pour ces domaines (cf. théorème 2.3). La démonstration requiert de nouvelles dilatations, tant à partir du domaine Ω que du domaine Ω_P ; les questions de convergence sont résolues grâce aux résultats de [8].

2 Notations et présentation des résultats

Pour tout entier m, nous notons $\mathcal{P}_{2m}$ l'ensemble des polynômes réels des variables
z et $\bar{z}$, sous-harmoniques et sans termes harmoniques, dont le degré est au plus égal à $2m$. $\mathcal{H}_{2m}$ désigne le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{P}_{2m}$ qui sont homogènes de degré $2m$. L'espace des polynômes en z et $\bar{z}$ de degré inférieur ou égal à $2m$ est muni d'une norme notée $\| \ \|$.

Pour tout polynôme Q, on note $Q_{j\bar{q}}$ le polynôme dérivé : $\frac{\partial^{(j+q)}Q}{\partial z^j \partial \bar{z}^q}$.

A tout élément Q de $\mathcal{P}_{2m}$, on associe un domaine de $\mathbf{C}^2$, noté Ω_Q, défini par

$$\Omega_Q = \{(w,z) / \operatorname{Re} w + Q(z) < 0\}.$$

Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière (notée $b\Omega$) est régulière, pseudoconvexe et de type fini ($2m$) en un point ζ. Il est bien connu (voir, par exemple, la proposition 1.1 de [10]) qu'il existe un système de coordonnées locales holomorphes ramenant ζ en $(0,0)$ et dans lequel la frontière de Ω est définie par une équation du type :

$$\operatorname{Re} w + H(z) + 0(|z|^{2m} + |w|) = 0,$$

où $H \in \mathcal{H}_{2m}$.

Nous noterons $\mathcal{H}(\zeta)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_{2m}$ pour lesquels un tel système de coordonnées locales existe. On vérifie facilement que :

$$\mathcal{H}(\zeta) = \{\lambda H(e^{i\theta} z) \ ; \ \lambda \in \mathbf{R}^{+*}, \theta \in \mathbf{R}\}$$

où H est un élément quelconque de $\mathcal{H}(\zeta)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre principal résultat :

Théorème 2.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini au voisinage de ζ, $\zeta \in b\Omega$. S'il existe une suite $(\varphi_k)_k$ d'automorphismes analytiques de Ω et un point (a,b) de Ω tels que $\lim \varphi_k(a,b) = \zeta$, alors Ω est biholomorphiquement équivalent à Ω_H où $H \in \mathcal{H}(\zeta)$.*

Remarque 2.2 *Si H_1 et H_2 appartiennent à $\mathcal{H}(\zeta)$, alors Ω_{H_1} et Ω_{H_2} sont évidemment bihomorphiquement équivalents.*

On déduit immédiatement du théorème 2.1 et du lemme 2.6 énoncé ci-après le principe de localisation suivant :

Théorème 2.3 *Soient Ω_j $(j = 1, 2)$ deux domaines bornés de $\mathbf{C}^2$ dont les frontières sont pseudoconvexes et de types finis aux voisinages des points $\zeta_j \in b\Omega_j$. Supposons qu'il existe des suites $(\varphi_{k,j})_k$ d'automorphismes analytiques de Ω_j et des points (a_j, b_j) de Ω_j tels que $\lim \varphi_{k,j}(a_j, b_j) = \zeta_j$. Alors Ω_1 et Ω_2 sont biholomorphiquement équivalents si et seulement si $\mathcal{H}(\zeta_1) = \mathcal{H}(\zeta_2)$.*

Remarque 2.4 *Les théorèmes 2.1 et 2.3 restent probablement vrais lorsque le domaine Ω n'est pas borné mais tel que son adhérence soit contenue dans un ouvert taut. Le lemme 2.5 montre en particulier que les domaines Ω_P $(P \in \mathcal{P}_{2m})$ satisfont cette condition. Une telle version de nos résultats caractériserait donc les domaines modèles Ω_H $(H \in \mathcal{H}_{2m}, m \in \mathbf{N}^*)$ parmi certains domaines non bornés de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes est non compact.*

Il serait également intéressant de caractériser les polynômes P de $\mathcal{P}_{2m}$ dont le domaine Ω_P associé est biholomorphe à un ouvert borné de $\mathbf{C}^2$.

La démonstration du théorème 2.1 requiert l'utilisation des lemmes suivants; ils seront établis dans le § 4.

Lemme 2.5 *Soit σ_∞ une fonction de classe C^2 sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ telle que $\sigma(0) = 0$ et $\int_{\mathbf{C}} \bar{\partial}\partial\sigma_\infty = +\infty$. Soit $(\sigma_k)_k$ une suite de fonctions sous-harmoniques convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers σ_∞. Soient ω un domaine quelconque de $\mathbf{C}^p$ $(p \geq 1)$ et z_0 un point fixé dans ω. Alors toute suite d'applications holomorphes $h_k : \omega \to \mathbf{C}^2$, telle que $h_k(\omega) \subset \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 \ ; \ \operatorname{Re} w + \sigma_k(z) < 0\}$ et $\{h_k(z_0), k \in \mathbf{N}\}$ soit relativement compact dans $\{(w,z) \in \mathbf{C}^2 \ ; \ \operatorname{Re} w + \sigma_\infty(z) < 0\}$, est une famille normale.*

Lemme 2.6 *Soient $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ et $H \in \mathcal{H}_{2m}$. Si Ω_Q et Ω_H sont biholomorphes, alors la partie homogène de plus haut degré de Q est égale à $\lambda H(e^{i\nu} z)$, où $\lambda > 0$ et $\nu \in [0, 2\pi]$.*

Lemme 2.7 *Soit $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ tel que $\deg(Q) > 2$. On suppose qu'il existe une suite de nombres complexes $(z_k)_k$ telle que $\lim |z_k| = +\infty$ et $\lim Q_{j\bar{q}}(z_k) = 0$ pour $j, q > 0$ et $(j + q) < \deg Q$. Alors, il existe $\nu \in [0, 2\pi]$ tel que :*

i) $\lim \operatorname{Re}(e^{i\nu} z_k) = 0$;

ii) $Q = \lambda[(2\operatorname{Re} e^{i\nu} z)^s - 2(e^{i\nu} z)^s]$ *où* $\lambda > 0$ *et* $s = \deg Q$.

Lemme 2.8 *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbf{C}^2$ *dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini au voisinage de* ζ. *On suppose qu'il existe un biholomorphisme* f *de* Ω *sur* Ω_Q $(Q \in \mathcal{P}_{2m})$ *ainsi qu'une suite* (w_k, z_k) *dans* Ω_Q *tels que :*

i) $\lim(|w_k|^2 + |z_k|^2) = +\infty$;

ii) $|\operatorname{Re} w_k + Q(z_k)| \geq c > 0$; $\forall k \in \mathbf{N}$;

iii) $\lim f(w_k, z_k) = \zeta$.

Alors : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(-1 + it, 0) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(-1 - it, 0) = \zeta$.

3 Preuve du théorème 2.1

La démonstration s'effectue en trois étapes.

Soit $2m$ le type de la frontière de Ω en ζ et H un élément de $\mathcal{H}(\zeta)$. Il a été établi dans [8] que pour tout point (a, b) de Ω, il existe un polynôme Q appartenant à $\mathcal{P}_{2m}$ et un biholomorphisme Ψ de Ω sur Ω_Q tels que $\Psi(a, b) = (-1, 0)$. Notre première étape précise ce résultat :

• *Il existe* $(a, b) \in \Omega$ *tel que, pour tout* $Q \in \mathcal{P}_{2m}$, *l'existence d'un biholomorphisme* $\Psi : \Omega \to \Omega_Q$ *vérifiant* $\Psi(a, b) = (-1, 0)$ *force l'égalité* $\deg Q = 2m$.

Quitte à effectuer un changement de variable holomorphe local, on supposera que $\zeta = (0, 0)$ et que pour un voisinage V de $(0, 0)$ assez petit :

$$(w, z) \in V \cap \Omega \Leftrightarrow \operatorname{Re} w + H(z) + 0(|w| + |z|^{2m}) < 0.$$

Considérons une suite de points $(a_k, b_k) = \left(\frac{-1}{k}, 0\right)$ qui, pour k assez grand, sont dans $\Omega \cap V$ et une suite de biholomorphismes $\Psi_k : \Omega \to \Omega_{Q_k}$ $(Q_k \in \mathcal{P}_{2m})$ tels que $\Psi_k(a_k, b_k) = (-1, 0)$. Il nous suffit d'établir que $\deg Q_k = 2m$ pour k assez grand. En composant Ψ_k avec une transformation du type $(w, z) \mapsto (w, \lambda_k z)$ $(\lambda_k > 0)$, on peut supposer que $\|Q_k\| = 1$ et donc que, après une éventuelle extraction, $(Q_k)_k$ converge vers un élément Q_∞ de $\mathcal{P}_{2m}$.

Soit $(\Delta_k)_k$ la suite de dilatations définies par $\Delta_k(w, z) = (kw, k^{1/2m} z)$. Soient également $(\tilde{\Omega}_k)_k$ et $(\tilde{D}_k)$ les suites de domaines définis par $\tilde{\Omega}_k =$