Astérisque

MONGI BLEL

Sur le cône tangent associé à un courant positif fermé

Astérisque, tome 217 (1993), p. 29-38

http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__29_0

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur le cône tangent associé à un courant positif fermé

Mongi BLEL

1- *Introduction et énoncé des résultats* . — On se donne un courant positif fermé T de bidegré (p, p) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ avec $1 \leq p \leq n - 1$. On suppose que $O \in \Omega$. Le “cône tangent” à T en O s’il existe est la limite faible au sens des courants de la famille $((h_r)^*T)_{r>0}$ quand r tend vers 0. Le problème de l’existence du cône tangent a été posé par R.Harvey [4] en 1977. Dans les travaux de C.O.Kiselman [5], puis de l’auteur en collaboration avec J.P.Demailly et M.Mouzali [1] il est répondu négativement à ce problème. Dans [5] C.O.Kiselman a construit une fonction plurisousharmonique φ sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, telle que le courant $T = i\partial\bar{\partial}\varphi$ associé n’admet pas de cône tangent en O . Dans [1] on donne des conditions suffisantes pour que le cône tangent à un courant positif fermé T existe. On notera K_p l’ensemble des courants positifs fermés coniques de bidegré (p, p) sur $\mathbb{C}^n$ et de nombre de Lelong égal à 1 en O . C’est une partie convexe métrisable et faiblement compacte dans l’espace des courants. Pour tout courant positif fermé T , l’ensemble des valeurs limites de

la famille $((h_r)^*T)_{r < 1}$ est une partie compacte connexe contenue dans $m.K_p$, où m est le nombre de Lelong de T en O . Inversement si on se donne une partie M connexe fermée de K_1 , il existe un courant positif fermé T de type $(1,1)$ telle que M soit l'ensemble des valeurs limites de la famille $((h_r)^*T)_{r > 0}$ (cf [1] et [5]). Dans ce travail on généralise ces résultats pour les courants de type (p,p) . On utilise la méthode de recollement par partition de l'unité en ajoutant un courant correctif de nombre de Lelong nul pour avoir la positivité. On démontre le théorème suivant :

Théorème 1 -1 . —

Soit M une partie connexe fermée de K_p où $p \geq 2$. Il existe un courant positif fermé T de bidegré (p,p) sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ tel que la famille $((h_r)^*T)_{r > 0}$ admet M comme ensemble de valeurs limites.

Dans ce travail on donne une esquisse de la démonstration de ce théorème et on donne une condition nécessaire et suffisante relative à la mesure trace pour les courants de type (p,p) ($p = 1$ ou $n - 1$) pour l'existence du cône tangent. Les détails de démonstrations se trouvent dans l'article original de l'auteur [2].

On démontre en particulier :

Théorème 1-2 . —

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ contenant O avec $p = 1$ ou $n - 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le courant T admette un cône tangent en O est que la famille de mesures $r^{2p}(h_r)^\sigma_T$ admette une limite au sens vague des mesures quand r tend vers 0, où σ_T représente la mesure trace du courant T .*

On montre que cette condition n'est pas suffisante pour les courants de bidimension (p,p) en général, avec $2p \leq n - 1$. Le cas général et les détails de démonstrations paraîtront dans [2].

Nous utilisons les notations classiques : $\alpha = i\partial\bar{\partial}\text{Log}|z|$, $\beta = (i/2)\partial\bar{\partial}|z|^2$ où $z \in \mathbb{C}^n$ et $n \geq 2$. On note

$$T = \sum_{|I|=|J|=k} T_{I,J}\sigma_k dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

un courant de bidimension (p,p) dans $\mathbb{C}^n$ avec $p+k=n$ et $\sigma_k = \frac{i^{k^2}}{2^k}$. On définit la mesure

$$\sigma_T = T \wedge \beta^p / p! = \sum_{|I|=k} T_{I,I} d\lambda$$

appelée mesure trace du courant T et $d\lambda = (i/2)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$. On pose $\sigma_T(r) = \sigma_T(B(r))$ où $B(r)$ désigne la boule de centre O et de rayon r dans $\mathbb{C}^n$, et on considère enfin la masse projective de T notée $\nu_T(r) = \frac{\sigma_T(r)}{\tau_p r^{2p}}$, où $\tau_p = (\pi^p/p!)$ désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{C}^p$. On sait que $\nu_T(r)$ est une fonction croissante de r . La limite de $\nu_T(r)$ quand r tend vers 0^+ est appelée nombre de Lelong de T en O et notée $\nu_T(0)$. On rappelle la formule classique de Lelong-Jensen pour un courant positif fermé sur $\mathbb{C}^n$: Pour tout $r_2 > r_1 > 0$,

$$\nu_T(r_2) - \nu_T(r_1) = (1/\pi^p) \int_{B(r_2) \setminus B(r_1)} T \wedge \alpha^p.$$

Il en résulte que si T est un courant positif fermé conique on a $T \wedge \alpha^p = 0$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et donc $\nu_T(r) = \nu_T(0)$ (cf [1] pour d'autres propriétés des courants coniques).

2- Construction du courant . —

Etant donné une partie M fermée connexe de K_p , on se propose de construire un courant positif fermé T défini sur un voisinage de O tel que l'ensemble des valeurs limites de la famille $((h_r)^* T)_{r>0}$ est exactement l'ensemble M . Pour cela on prend une suite (T_j) dense dans M et telle que la suite $T_{j+1} - T_j$ tend faiblement vers 0. On associe à la suite T_j une suite de potentiels (U_j) , $T = i\partial\bar{\partial}U_j$. On montre que pour une partition de l'unité adéquate le courant

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j U_j$$

est presque positif sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dans le sens qu'il existe un courant W continu sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $i\partial\bar{\partial}U + W$ soit un courant positif fermé. On montrera que ce courant répond au problème posé ci-dessus.

Dans une première étape, on construit un potentiel canonique U associé à chaque courant conique T , tel que $T = i\partial\bar{\partial}U$ et la norme masse de U dépend continuellement de la norme masse de T . Pour cela on se ramène à l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$ et on utilise le théorème de décomposition de Hodge sur $\mathbb{P}^{n-1}$ et les propriétés de l'opérateur de Green G . Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur au livre de De Rham [8].

On note d^* , $\bar{\partial}^*$ et ∂^* les opérateurs adjoints des opérateurs d , $\bar{\partial}$ et ∂ respectivement par rapport au produit hermitien défini sur les formes différentielles de bidegré (p, q) sur $\mathbb{P}^{n-1}$ relatif à la forme volume $\tau = w^{n-1}/(n-1)!$. On pose $\Delta = dd^* + d^*d$. On démontre que

$$\Delta = 2(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) = 2(\partial\partial^* + \partial^*\partial).$$

L'opérateur Δ est appelé opérateur de Laplace Beltrami. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à A. Weil [10] et le livre de Demailly [3] et pour plus de détails de démonstration on renvoi à l'auteur [2].

Lemme 2-1 . —

Soit Θ un courant positif fermé sur $\mathbb{P}^{n-1}$ de bidegré (p, p) où $p \geq 2$. Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\Theta = C\omega^p + \partial\bar{\partial}\partial^*\bar{\partial}^*(GG(\Theta))$$

où G est l'opérateur de Green associé à l'opérateur Δ .

Démonstration —

D'après le théorème de décomposition de Hodge il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\Theta = C\omega^p + \bar{\partial}\bar{\partial}^*G(\Theta) + \partial^*\bar{\partial}G(\Theta).$$

Mais $\bar{\partial}G(\Theta) = G(\bar{\partial}\Theta) = 0$. Donc on aura:

$$G(\Theta) = \partial\partial^*GG(\Theta) + \partial^*\partial GG(\Theta) = \partial\partial^*GG(\Theta).$$

Il en résulte que

$$\Theta = C\omega^p + \partial\bar{\partial}\partial^*\bar{\partial}^*(GG(\Theta))$$

De cette manière on associe à chaque courant positif fermé Θ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ un potentiel canonique $V = \partial^*\bar{\partial}^*GG(\Theta)$. Il résulte des propriétés de l'opérateur G que le potentiel V est d'ordre nul et que ses coefficients sont des fonctions localement intégrables.

Proposition 2-2 . —

Pour tout courant positif fermé T de K_p où $p \geq 2$, il existe un courant invariant par les homothéties complexes U d'ordre nul, de bidegré $(p-1, p-1)$ tel que

$$i\partial\bar{\partial}U = T$$

De plus la norme masse de U portée par un compact est bornée indépendamment de T dans K_p .

Démonstration —

Au courant T on associe le courant Θ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ telle que T est le prolongement sur $\mathbb{C}^n$ de $\pi^*\Theta$, où π est la projection de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}^{n-1}$. D'après ce qui précède $\Theta = C\omega^p + \partial\bar{\partial}\partial^*\bar{\partial}^*(GG(\Theta))$. On pose U le prolongement trivial du courant $(\partial\text{Log}|z| \wedge \bar{\partial}\text{Log}|z|) \wedge \alpha^{p-2} + \pi^*V$ sur $\mathbb{C}^n$. Le reste de la proposition résulte du lemme 3-6 dans [2].