Astérisque

LOUIS BOUTET DE MONVEL
ANDREI IORDAN

Sur les feuilletages $\mathbb{C}$-tangents des sous-variétés du bord d'une variété complexe

Astérisque, tome 217 (1993), p. 39-52
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__39_0>

SUR LES FEUILLETAGES $\mathbb{C}$-TANGENTS DES SOUS-VARIÉTÉS DU BORD D'UNE VARIÉTÉ COMPLEXE

Louis BOUTET de MONVEL et Andrei IORDAN

§1. Introduction

Dans cet article nous étudions la géométrie de contact ou symplectique des bords des domaines complexes, en relation avec l'analyse complexe sur ces domaines.

Soient D un domaine de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe C^1, et M une sous-variété de classe C^1 de ∂D. On dit que M est $\mathbb{C}$-tangente en un point $p \in M$ si l'espace tangent $T_p(M)$ est contenu dans le plus grand sous-espace $T_p^c(\partial D)$ de l'espace tangent $T_p(\partial D)$ stable par la structure complexe de $\mathbb{C}^n$. On dira que M est $\mathbb{C}$-tangente si elle l'est en chacun de ses points. On dit encore qu'un feuilletage de M est $\mathbb{C}$-tangent si ses feuilles sont $\mathbb{C}$-tangentes. Si D est strictement pseudoconvexe à frontière de classe C^2, il est prouvé dans [BS], [HT] qu'une sous-variété $\mathbb{C}$-tangente est totalement réelle et de dimension inférieure ou égale à n-1.

On note $\mathcal{O}(\overline{D})$ l'algèbre des fonctions sur $\overline{D}$ qui admettent un prolongement holomorphe au voisinage de $\overline{D}$. Un sous-ensemble E de ∂D est un ensemble localement pic (resp. localement de module maximum) pour $\mathcal{O}(\overline{D})$ si'il existe, pour tout $p \in E$, un voisinage U de p et une fonction holomorphe dans U, tels que f=1 sur $E \cap U$ (resp. $|f|=1$ sur $E \cap U$) et $|f| < 1$ sur $\overline{D} \cap U \setminus E$.

On note $A^k(D)$ $(k \leq \infty)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans D qui admettent un prolongement de classe C^k à $\overline{D}$; on définit de façon analogue les ensembles localement pic ou localement de module maximum pour $A^k(D)$.

Cette étude est motivée entre autre par les résultats suivants:

THEOREME 1 ([HS],[CC2]).- *Soit* D *un domaine strictement pseudoconvexe, à frontière* C^∞, *dans* $\mathbb{C}^n$. *Un sous-ensemble fermé* E *de* ∂D *est localement pic pour* $A^\infty(D)$ *si et seulement si, au voisinage de chacun de ses points,* E *est contenu dans une sous-variété* $\mathbb{C}$*-tangente de dimension* n-1 *de* ∂D.

THEOREME 2 ([DS]).- *Soient* D *un domaine strictement pseudoconvexe à frontière analytique réelle dans* $\mathbb{C}^n$ *et* M *une sous-variété analytique totalement réelle, de dimension* n *de* ∂D. *Alors* M *est localement un ensemble de module maximum pour* $\mathcal{O}(\bar{D})$ *si et seulement si* M *possède un feuilletage analytique réel* $\mathbb{C}$*-tangent de dimension* n-1.

Si D est un domaine strictement pseudoconvexe à frontière C^∞ de $\mathbb{C}^n$, il est prouvé dans [I3] qu'un ensemble localement de module maximum pour $A^\infty(D)$ est, au voisinage de chacun de ses points, contenu dans une sous-variété totalement réelle de dimension n de ∂D qui admet un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1. Dans le cas d'un domaine borné D strictement pseudoconvexe à frontière C^∞ un sous-ensemble fermé de ∂D localement pic pour $A^\infty(D)$ est globalement un ensemble pic pour $A^\infty(D)$ [FH]. Il n'en est pas de même pour les ensembles de module maximum: un ensemble localement de module maximum pour $A^\infty(D)$ n'est pas nécéssairement globalement un ensemble de module maximum pour $A^\infty(D)$ (voir [DS] pour un exemple). Dans [I2] il est prouvé qu'une sous-variété M totalement réelle de dimension n de la frontière d'un domaine D à frontière de classe C^2 admet un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1 si et seulement si la forme de Levi est "diagonalisable dans $T(M) \cap T^c(\partial D)$" (voir §4 corollaire 3).

Dans cet article on étudie les sous-variétés $\mathbb{C}$-tangentes du bord d'un domaine de $\mathbb{C}^n$ dont la forme de Levi est non-dégénérée en utilisant la structure de contact du bord. En particulier dans le cas strictement pseudoconvexe on caractérise en termes de la forme de Levi les sous variétés du bord qui admettent un feuilletage $\mathbb{C}$-tangent de codimension 1 (cf th. 4 et cor. 3). On donne aussi des applications aux sous-variétés localement pics ou localement de module maximum pour $\mathcal{O}(\bar{D})$.

§2. Préliminaires.

a) Structures symplectiques.

Rappelons qu'une variété symplectique est une variété différentiable X de dimension paire, dimX=2n, munie d'une forme symplectique, c'est à dire d'une 2-forme Ω fermée ($d\Omega=0$) et non-dégénérée (ie. Ω^n ne s'annule en aucun point de X).

On dit qu'une sous-variété M de X est isotrope (ou isotrope pour Ω) si $\Omega(\xi,\eta)=0$ pour tous vecteurs ξ,η tangents à M. Si M est une sous-variété isotrope de X on a $\dim M\leq n$. Si de plus $\dim M=n$, on dit que M est une sous-variété lagrangienne de X.

Le résultat suivant est dû à A.Weinstein ([W]) dans le cas le plus général; nous l'utiliserons dans le cas plus facile où M_1 et M_2 sont isotropes:

THEOREME 3 [W].- *Soient* (X_1,Ω_1), (X_2,Ω_2) *deux variétés symplectiques,* $M_1\subset X_1$, $M_2\subset X_2$ *des sous-variétés. Soit* φ: $M_1\to M_2$ *un difféomorphisme isométrique (ie. tel que* $\varphi^*(\Omega_2|_{M_2})=\Omega_1|_{M_1}$*)*[1]. *Alors pour tout* $p\in M_1$ *il existe un voisinage* V_1 *de* p *dans* X_1, *un difféomorphisme* ψ *de* V_1 *sur un voisinage* V_2 *de* $\varphi(p)$ *dans* X_2 *tel que* $\psi|_{V_1\cap M_1}=\varphi$ *et* $\psi^*(\Omega_2|_{V_2})=\Omega_1|_{V_1}$.

Si les données sont analytiques réelles, on peut choisir le difféomorphisme ψ *analytique réel.*

b) Structures de contact

Rappelons qu'une variété de contact est une variété différentiable Z de dimension impaire, dimZ=2n+1, munie d'une forme de contact, c'est à dire d'une 1-forme ω telle que $\omega\wedge(d\omega)^n$ ne s'annule en aucun point de Z (élément de volume).

[1] Nous notons $\Omega\,|\,M$ la forme induite par Ω sur M : $\Omega\,|\,M = i^*\Omega$ si $i : \Omega\to M$ est l'injection canonique.

Si (Z,ω) est une variété de contact, il existe un unique champ de vecteurs X_ω sur Z (le champ de vecteurs caractéristique de ω) tel que

$$i(X_\omega)\omega = 1, \quad i(X_\omega)d\omega = 0,$$

où on a noté $i(\xi)\eta$ le produit intérieur gauche d'une forme différentielle η par un champ de vecteurs ξ: $i(\xi)$ est l'unique antidérivation de l'algèbre des formes différentielles telle que $i(\xi)\omega=<\xi,\omega>$ (resp. 0) si ω est de degré 1 (resp. 0). La forme $d\omega$ est un invariant intégral absolu de X_ω, ie. on a $i(X_\omega)d\omega=0$ et $\mathcal{L}_{X_\omega}(d\omega)=0$, où $\mathcal{L}_{X_\omega}=d\, i(X_\omega)+i(X_\omega)d$ est la dérivée de Lie. Localement elle fournit par passage au quotient une forme symplectique sur l'espace des orbites de X_ω. Le théorème de Darboux montre qu'il existe au voisinage de chaque point de Z un systèmes de coordonnées locales $(x_0, x_1, \dots x_{2n})$ dans lequel on a $\omega=dx_0+\sum_1^n x_i\, dx_{n+i}$ (dans ces coordonnées on a $X_\omega=\frac{\partial}{\partial x_0}$).

On a $TZ=L_\omega\oplus\ker\omega$, où L_ω est le fibré de rang 1 engendré par X_ω.

On dit qu'une sous-variété N de Z est isotrope (pour ω) si $TN\subset\ker\omega$, ie. si la forme induite sur N par ω est nulle. Si N est une sous-variété isotrope de Z, on a $\dim N\leq n$ (puisque $d\omega\,|\,TN$ est nulle et $d\omega\,|\ker\omega$ est non dégénérée); on dit que N est une sous-variété lagrangienne si de plus $\dim N=n$. La notion d'isotropie, comme le fibré $\ker\omega$ (mais pas X_ω), ne dépendent que de la classe conforme de Z, c'est à dire de ω à un facteur multiplicatif près.

c) Forme de Levi

Soit V est une variété complexe. Notons V^R la variété réelle sous jacente et TV^R le fibré tangent réel de V^R, muni de la structure complexe $J\in L(TV^R)$ ($J^2=-1$), déduite de celle de V. On a $\mathbb{C}\otimes TV^R=T'(V)\oplus T''(V)$ avec $T'=\ker(J-i)$, $T''=\ker(J+i)$.

Si ρ est une fonction de classe C^2 sur V^R, la $(1,1)$-forme $\partial\bar\partial\rho$ définit une forme bilinéaire L_ρ sur $T'\times T''$ ($L_\rho(X,\bar Y)=\sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar z_k}X_j\bar Y_k$ si on a choisi un système de coordonnées locales holomorphes z_i).