Astérisque

MAKHLOUF DERRIDJ

D. TARTAKOFF

Analyticité microlocale pour $\Box_b$ dans des domaines pseudoconvexes découplés

Astérisque, tome 217 (1993), p. 75-83

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__75_0>

ANALYTICITE MICROLOCALE POUR $\Box_b$ DANS DES DOMAINES PSEUDOCONVEXES DECOUPLES.

Makhlouf DERRIDJ & D. TARTAKOFF

1. Introduction

Le but de ce travail est d'étendre à l'opérateur $\Box_b$ certains résultats que nous avons obtenus pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann [4] concernant la régularité analytique des solutions. En fait dans [4] nous avons aussi donné de tels résultats pour $\Box_b$ mais avec des restrictions de dimension et aussi des restrictions portant sur la taille des blocs apparaissant dans l'hypothèse de découplage. De telles restrictions sont inhérentes à la méthode d'estimations semi-maximales utilisées pour majorer convenablement les dérivées dans les directions complexes et dans la direction dite "manquante" de la solution considérée.

Il s'avère que si on veut s'affranchir de la restriction sur la taille des blocs, en dimension $n \geq 3$, il faut pouvoir se passer d'estimations semi-maximales. Le problème posé par l'opérateur $\Box_b$ est qu'il est caractéristique dans la direction non complexe. Les résultats généraux connus en E.D.P. (par exemple [9], [11]) disent que $\Box_b$ est hypoelliptique analytique dans les directions complexes, qui sont des "directions elliptiques pour $\Box_b$". Donc il suffit de regarder l'hypoellipticité analytique de $\Box_b$, dans deux directions à savoir "direction manquante positive" et "direction manquante négative" : c'est l'analyticité microlocale pour $\Box_b$. Pour cela l'idée naturelle est d'établir, pour chacune de ces deux directions, des estimations, qui sont dites microlocales, qui seront différentes entre elles. La méthode microlocale a été utilisée par J. J. Kohn dans d'autres contextes ([7]).

En fait de telles estimations seront établies dans des domaines plus généraux que ceux considérés dans l'étape concernant la régularité analytique proprement dite, étape qui nécessite des restrictions liées aux exigences dues aux "opérateurs localisants" considérés.

Mentionnons que le cas $n = 2$ relève de techniques plus particulières et on connaît surtout des contre-exemples ([1]), tandis que pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann le cas $n = 2$ ne diffère pas des autres cas. Pour des travaux touchant notre sujet citons ([4] [9] [11] [12] [13] [14]) en ce qui concerne la régularité locale.

2. Quelques notations et définitions.

Commençons par rappeler que l'opérateur $\Box_b$ est défini par

$$\Box_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b$$

où $\bar{\partial}_b$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann induit par l'opérateur $\bar{\partial}$ de l'espace ambiant $\mathbf{C}^n$ sur l'hypersurface considérée S, et $\bar{\partial}_b^*$ son adjoint.

Rappelons aussi que l'espace tangent complexifié de S se décompose en :

$$\mathbf{C}TS = \mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}} \oplus \mathbf{T}$$

où $\mathbb{L}$ désigne l'espace des directions holomorphes, $\bar{\mathbb{L}}$ son conjugué, et $\mathbf{T}$ est une "direction manquante". Choisissons une base $L_1, \cdots, L_{n-1}$ de $\mathbb{L}$ et T un vecteur définissant $\mathbf{T}$; on peut choisir T purement imaginaire. Alors la forme de Levi de S est représentée par la matrice (c_{jk}), j, k variant de 1 à $n-1$, où

$$[L_j, \bar{L}_k] = c_{jk}T \quad (\text{modulo } \mathbb{L},\ \bar{\mathbb{L}}). \tag{2.1}$$

Nous travaillerons toujours au voisinage du point 0.

Hypothèse sur la forme de Levi de S :
(2.2) *Il existe une base $(L_1, \cdots, L_{n-1})$ de $\mathbb{L}$ telle que :*

$$(c_{j,k}) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

où chaque bloc A_r est une matrice positive dont les valeurs propres sont comparables (voir [2] pour l'introduction de cette notion).

Notons $t_j = \operatorname{tr}(A_j)$. Alors $\exists \epsilon > 0 : \epsilon t_j \leq A_j$.

Pour bien distinguer les blocs A_r nous donnons des notations supplémentaires.

Notons $(L_1, \cdots, L_{j_1})$ les champs holomorphes qui donnent la partie A_1, $(L_{j_1+1}, \cdots, L_{j_2})$ ceux qui donnent A_2 et ainsi de suite. Si $(w_1, \cdots, w_{n-1})$ est le base duale de $(L_1, \cdots, L_{n-1})$ une $(0,1)$ forme v s'écrira $v = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \bar{w}_j$. Posons alors les définitions

$$\begin{cases} J_1 = (1, \cdots, j_1),\ J_2 = (j_1+1, \cdots, j_2) \ \text{ etc...} \\ v = (v_1, \cdots, v_{n-1}),\quad v_j \in \mathcal{D}(V),\quad V \text{ voisinage de } 0 \\ v_{J_m} = (v_j)_{j \in J_m} \\ \| \bar{\mathbb{L}} v \|^2 = \sum\limits_{j,k} \| \bar{\mathbb{L}}_j v_k \|^2 \quad , \quad \| Lv \|^2 = \sum\limits_{j,k} \| L_j v_k \|^2 \\ \| \bar{L}_{J_k} v_{J_m} \|^2 = \sum\limits_{i \in J_k, j \in J_m} \| \bar{L}_i v_j \|^2 \quad , \quad \| L_{J_k} v_{J_m} \|^2 = \sum\limits_{i \in J_k, j \in J_m} \| L_i v_j \|^2 . \end{cases} \tag{2.3}$$

Introduisons maintenant deux opérateurs pseudodifférentiels qui microlocalisent dans la direction "T positive" et dans la direction "T négative".

Soit $(x_1, \cdots, x_{2n}, t)$ un système de coordonnées tel que $T = \frac{1}{i}\partial_t$. Les variables $(x_1, \cdots, x_{2n})$ sont celles "des directions $\mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}}$". Notons alors (ξ, τ) les variables duales de (x, t). Considérons les fonctions $p^+(\xi, \tau)$ et $p^-(\xi, \tau)$ de J. J. Kohn ([7]).

La fonction p^+ vaut 1 sur le cône tronqué :

$$2 \leq |(\xi, \tau)|, \left| \frac{(\xi, \tau)}{|(\xi, \tau)|} - \frac{\tau}{|\tau|} \right| \leq \frac{1}{10},$$

et vaut 0 hors du cône tronqué :

$$1 \leq |(\xi, \tau)|, \quad \left| \frac{(\xi, \tau)}{|(\xi, \tau)|} - \frac{\tau}{|\tau|} \right| \leq \frac{1}{5}.$$

De façon analogue, la fonction p^- vaut 1 sur le cône tronqué :

$$2 \leq |(\xi,\tau)|, \quad \left|\frac{(\xi,\tau)}{|(\xi,\tau)|} + \frac{\tau}{|\tau|}\right| \leq \frac{1}{10} ;$$

et vaut 0 hors du cône tronqué :

$$1 \leq |(\xi,\tau)|, \quad \left|\frac{(\xi,\tau)}{|(\xi,\tau)|} + \frac{\tau}{|\tau|}\right| \leq \frac{1}{5}.$$

On note alors $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^+(D)$ et $\mathcal{P}^- = \mathcal{P}^-(D)$, les opérateurs pseudo différentiels d'ordre 0 de symboles p^+ et p^-. Remarquons alors qu'en dehors des supports de p^+ et p^-, $\Box_b$ est elliptique, donc (microlocalement) hypoelliptique analytique.

3. Estimations microlocales et sous-elliptiques.

Ces estimations sont regroupées dans les deux théorèmes suivants :

THEOREME 3.1. *Sous l'hypothèse (2.2) les estimations suivantes sont satisfaites :*

$$a)\ \| \bar{L}\mathcal{P}^+v \|^2 + \sum_{j=1}^{p} \| L_{J_j}\mathcal{P}^+v_{J_j} \|^2 + \sum_{j=1}^{p} \| \sqrt{t_j}L\mathcal{P}^+v_{J_j} \| + \sum_{j=1}^{p} (t_jT\mathcal{P}^+v_{J_j}, \mathcal{P}^+v_{J_j}) \leq$$

$$\leq C\left(\Box_b\mathcal{P}^+v, \mathcal{P}^+v\right) + C \| \mathcal{P}^+v \|^2 \qquad \forall v \in \mathcal{D}^{0,1}(V).$$

$$b)\ \| L\mathcal{P}^-v \|^2 + \sum_{j\neq m} \| \bar{L}_{J_j}\mathcal{P}^-v_{J_m} \|^2 + \sum_{|J_m|>1} \| \bar{L}_{J_m}\mathcal{P}^-v_{J_m} \|^2 + \sum_{j\neq m} \| \sqrt{t_j}\bar{L}\mathcal{P}^-v_{J_m} \|^2 +$$

$$+ \sum_{|J_m|>1} (t_mT\mathcal{P}^-v_{J_m}, \mathcal{P}^-v_{J_m}) - \sum_{k\neq m} (t_kT\mathcal{P}^-v_{J_m}) \leq C(\Box_b\mathcal{P}^-v, \mathcal{P}^-v) + C \| \mathcal{P}^-v \|^2 \quad \forall v \in \mathcal{D}^{0,1}(V)$$

Idée de la démonstration du théorème 3.1. On traite le cas de v^-. Le cas de v^+ relève des mêmes techniques.

$$(2.3) \qquad J^{\pm} = O(\| \bar{L}\mathcal{P}^{\pm}v \|_{L^2} \| \mathcal{P}^{\pm}v \|_{L^2} + \| \mathcal{P}^{\pm}v \|^2_{L^2})$$

et

$$J^{\pm} = O(\| L\mathcal{P}^{\pm}v \|_{L^2} \| \mathcal{P}^{\pm}v \|_{L^2} + \| \mathcal{P}^{\pm}v \|^2_{L^2}).$$

On utilisera

$$(2.4) \qquad \| \sqrt{t_k}L_jv_m \|^2_{L^2} = \| \sqrt{L_k}\bar{L}_jv_m \|^2_{L^2} + (t_kc_{jj}Tv_m, v_m)_{L^2} + J$$

$$Q_b(\mathcal{P}^-v\mathcal{P}^-v) = \sum_{k,m} \| \bar{L}_{J_k}\mathcal{P}^-v_{J_m} \|^2_{L^2} + \sum_{k,m} (c_{km}T\mathcal{P}^-v_k, \mathcal{P}^-v_m)_{L^2} + J^-$$

$$= \sum_{k=m} (1-\alpha_m) \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + (1-\beta) \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2}$$

$$+ \sum_{k=m} \alpha_m \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \beta \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \sum_{k,m} (c_{km} T \mathcal{P}^- v_k, \mathcal{P}^- v_m)_{L^2} + J^-$$

$$= \sum_k (1-\alpha_k) \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel^2_{L^2} + (1-\beta) \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \sum_k \alpha_k \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel^2_{L^2}$$

$$+ \beta \sum_{k\neq m} \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \sum_{k,m} (c_{km} T \mathcal{P}^- v_k, \mathcal{P}^- v_m)_{L^2} + J^-$$

$$- \sum_m \sum_{k,r\in J_m} \alpha_m (c_{kk} T \mathcal{P}^- v_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2} - \beta \sum_m \sum_{k\in J_m, r\notin J_m} (c_{kk} T \mathcal{P}^- v_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2}$$

$$= \sum_k (1-\alpha_k) \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel^2_{L^2} + (1-\beta) \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \sum_k \alpha_k \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel^2_{L^2}$$

$$+ \beta \sum_{k\neq m} \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \sum_{k,m} (c_{km} T \mathcal{P}^- v_k, \mathcal{P}^- v_m)_{L^2}$$

$$- \sum_m \sum_{r\in J_m} \alpha_m (t_m T \mathcal{P}^- r_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2} - \beta \sum_{p\neq m} \sum_{r\in J_m} (t_p T \mathcal{P}^- v_r, \mathcal{P}^- v_r)_{L^2} + J^-.$$

Soit $t'_k = \sum_{j\neq k} t_j$. Alors on écrit les quatre derniers termes comme :

$$\sum_m ((A_m - \alpha_m t_m - \beta t'_m) T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} + J^-.$$

Quand la dimension de A_m est au moins 2 la condition de trace dit que $A_m \leq (1-\delta) t_m$ pour un $\delta > 0$. Ainsi pour α_m plus grand que $1-\delta$, $A_m - \alpha_m t_m$ est un opérateur négatif et d'après l'inégalité précisée de Gärding, on a :

$$((A_m - \alpha_m t_m) T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} \geq 0 \bmod J^-,$$

ainsi que

$$\sum_m (-\beta t'_m T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} = \beta \sum_m (-t'_m T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} \geq 0 \mod J^-.$$

Quand la dimension de A_m est 1, on prend $\alpha_m = 1$ de telle sorte que $(A_m - \alpha_m t_m) T \mathcal{P}^-$ est un opérateur positif. Tenant compte de tout cela, on a :

$$\sum_{|J_k|>1} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel^2_{L^2} + \sum_{k\neq m} \parallel \bar{L}_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \sum_k \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_k} \parallel^2_{L^2}$$

$$+ \sum_{k\neq m} \parallel L_{J_k} \mathcal{P}^- v_{J_m} \parallel^2_{L^2} + \sum_{|J_m|>1} (t_m T \mathcal{P}^- v_{J_m} \mathcal{P}^- v_{J_m})_{L^2} +$$