CLAIRE VOISIN

Miroirs et involutions sur les surfaces K3

Astérisque, tome 218 (1993), p. 273-323

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__218__273_0>

Miroirs et involutions sur les surfaces $K3$

Claire Voisin*

§0 - Introduction

0.1. On propose dans ce travail une construction explicite de la "mirror symmetry" prédite par les physiciens et portée récemment à l'attention des mathématiciens par le travail de D. Morrison ([21]), pour un certain nombre de familles de variétés de Calabi-Yau, construites à l'aide de surfaces $K3$ munies d'une involution. Les numéros 0.2 à 0.5 sont une tentative de description des idées des physiciens sur le sujet (voir aussi [21]).

0.2. La prédiction du phénomène de miroirs entre variétés de Calabi-Yau provient de la théorie des supercordes et des σ-modèles et de la recherche d'un modèle consistant mathématiquement et physiquement, rendant compte de différents types d'interactions, refletées dans l'allure générale de l'action S, et quantifiable. L'action classique en théorie des cordes (se propageant dans une variété Riemannienne (M, g)) associe à une surface de Riemann avec bords (Σ, γ) et à une application $\varphi : \Sigma \to M$ son énergie $S(\varphi) = \int_\Sigma \|d\varphi\|^2 \, dA_\Sigma$; les solutions classiques sont des extrémales de S, par rapport à φ et γ. L'introduction de fermions (variables anticommutatives à considérer comme des sections tordues de φ^*TM), permet d'ajouter à cette action des termes fermioniques, où interviennent la connexion de Levi-Civita de M, et la courbure de M.

* Avec le support partiel du projet Science "Geometry of Algebraic varieties", Contrat SCI-0398-C(A)

L'action peut enfin être modifiée par l'ajout d'une terme du type $S_\omega(\varphi) = \int_\Sigma \varphi^*\omega$, où ω est une 2-forme fermée sur M. La somme de ces trois actions est invariante sous certaines transformations. L'action classique est invariante par difféomorphisme de Σ et changements conformes de métrique γ. L'introduction des variables fermioniques permet de définir au moins localement la supersymetrie, et l'existence de deux supersymetries dont le supercommutateur engendre les transformations conformes, recherchée pour des raisons physiques, conduit à prédire l'existence d'une structure complexe sur M.

Les physiciens cherchent à quantifier la théorie, c'est-à-dire à calculer des valeurs probables de certaines fonctionnelles (les "observables") sur l'espace des applications $\varphi : \Sigma \to M$ (et d'autres données comme les variables fermioniques), ayant des valeurs fixées sur le bord de Σ. L'instrument principal est fourni par les intégrales de Feynman.

Pour préserver les symétries de l'action lors de ce processus de quantification, les physiciens sont menés à imposer certaines conditions à la variété M, dont $\dim_{\mathbb{R}} M = 10$, et en supposant, dans une théorie à la Kaluza-Klein, que $M = \mathbb{R}^4 \times K$ avec K compacte de dimension 6, la préservation de la sypersymétrie mène à imposer que (K, g_K) soit une variété Kählerienne à courbure de Ricci nulle, c'est-à-dire une variété de Calabi-Yau. (Ce résultat qui résulte d'un calcul perturbatif au deuxième ordre, est d'ailleurs contredit par le calcul des termes d'ordre supérieur).

En admettant la possibilité de quantifier rigoureusement la propagation des supercordes dans une variété de Calabi-Yau de dimension trois, on est amené à associer à la donnée d'une telle variété X, d'une forme de Kähler η (correspondant à une métrique de Kähler Einstein) et d'une classe réelle λ dans $H^2(X)$ (correspondant au terme $\displaystyle\int_\Sigma \varphi^*\lambda$ de l'action), une théorie $N = 2$ surperconforme des champs. $\alpha = \eta + i\lambda$ est alors un élément de $H^1(\Omega_X)$ tel que $\operatorname{Re}\alpha$ soit une classe de Kähler.

0.3. Gepner [14] a conjecturé que cette correspondance est bijective à condition de ne considérer que les théories conformes à charges $U(1)$ entières et à charge centrale $c = 9$. D'autre part, il existe une involution naturelle sur l'espace des théories $N = 2$ surperconformes, qui consiste à considérer la même théorie conforme des champs sous-jacente, mais à changer le signe de certaines "charges" q, determinées comme les valeurs propres d'un opérateur de l'algèbre superconforme, représentée sur l'espace de Hilbert de la théorie.

Si X est une variété de Calabi-Yau, et $\alpha \in H^1(\Omega_X)$, l'espace tangent à la variété paramétrant les déformations de (X, α) se scinde naturellement en $H^1(T_X) \oplus H^1(\Omega_X)$. Witten [24] a expliqué comment construire un isomorphisme entre $H^1(T_X) \oplus H^1(\Omega_X)$ et les champs primaires "chiraux" (correspondant à $H^1(T_X)$) ou "antichiraux" (correspondant à $H^1(\Omega_X)$) de charge conforme $h = 2$ de la théorie conforme associée, qui décrivent l'espace tangent aux déformations (générateurs) de la théorie conforme. L'effet de l'involution mentionnée ci-dessus est le suivant: les champs primaires "chiraux" satisfont la condition $h = 2q$, tandis que les "antichiraux" satisfont $h = -2q$. A supposer que la théorie superconforme obtenue par involution provienne d'une donnée (X', α'), on doit donc avoir des isomorphismes $H^1(T_X) \simeq H^1(\Omega_{X'}), H^1(\Omega_X) \simeq H^1(T_{X'})$; (X', α') est appelé le miroir de (X, α). Notons que les isomorphismes ci-desus doivent être obtenus comme la différentielle de l'application miroir, dont l'existence résulte de la conjecture de Gepner.

0.4. Finalement, un des aspects les plus fascinants de cette application miroir réside dans la formule précise, annoncée par les physiciens, comparant l'accouplement de Yukawa sur $H^1(T_X)$ et la forme d'intersection sur $H^1(\Omega_{X'})$ où (X', α') est le miroir de (X, α). L'accouplement de Yakawa sur $H^1(T_X)$ est la forme cubique ψ donnée par l'application naturelle $S^3H^1(T_X) \to H^3(\Lambda^3 T_X)$. Ce dernier espace est rendu isomorphe à $\mathbb{C}$ par le choix d'une section de $K_X^{\otimes 2}$. La formule est alors la suivante: soit $u \in H^1(T_X)$ et $v \in H^1(\Omega_{X'})$ l'élément correspondant à u par l'isomorphisme : $H^1(T_X) \simeq$

$H^1(\Omega_{X'})$. Alors:

$$\psi(u) = \int_{X'} v^3 + \sum_{f:\mathbb{P}^1 \to X} e^{-\int_{\mathbb{P}^1} \alpha'} n(f) \left(\int_{\mathbb{P}^1} v \right)^3 \tag{0.4.1}$$

où la somme est effectuée sur toutes les composantes de l'ensemble des applications holomorphes $f : \mathbb{P}^1 \to X$, et où $n(f)$ est un entier. Aspinwall et Morrison [4], ont montré, en utilisant la définition précise de $n(f)$ (cf [24]) que $n(f) = 1$ pour une immersion $\mathbb{P}^1 \subset X'$ avec fibré normal $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, ainsi que pour les familles données par les revêtements ramifiés d'une telle courbe.

0.5. Les exemples connus de phénomène de miroir sont essentiellement fournis par les intersections complètes "du type Fermat" dans les espaces projectifs anisotropes, et leurs quotients par des sous-groupes du groupe d'isomorphimes agissant sur celles ci en préservant "la" forme holomorphe.

Cela tient à la construction de Gepner, qui constitue une des évidences pour la conjecture de Gepner, et qui produit une série de théories superconformes satisfaisant les conditions de 0.3, essentiellement obtenues par produits tensoriels de modèles E_k (connus) formant une série discrète indicée par les entiers. Le k^{ieme} modèle de la série discrète a une charge centrale $c_k = 3k/k + 2$. Pour obtenir, en composant les modèles $E_{k_1}, \cdots, E_{k_5}$, une théorie conforme $E_{(k)}$ de charge centrale $c = 9$, on doit imposer la condition $3 \sum_1^5 k_i / (k_i + 2) = 9$, ce qui est équivalent au fait que l'hypersurface de Fermat $M_{(k)}$ définie par $\sum_{i=1}^5 X_i^{k_i+2} = 0$ dans l'espace projectif inhomogène $\mathbb{P}(d/(k_1+2)), \cdots, (d/(k_5+2))$, où $d = PPCM(k_i + 2)$, est à fibré canonique trivial.

Gepner (1) suppose alors que $E_{(k)}$ est la théorie conforme des champs

(1) En fait, Gepner n'a noté cette correspondance que pour les hypersurfaces de Fermat dans l'espace projectif usuel. L'extension au cas anisotrope est due Greene-Vafa-Warner [16].