D. CERVEAU

Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés

Astérisque, tome 222 (1994), p. 49-92
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__222__49_0>

Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés

D. Cerveau
IRMAR - RENNES

Après avoir rappelé des résultats pour certains bien anciens - et souvent méconnus - concernant les d-tissus sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ on s'intéresse à la dynamique des 3-tissus feuilletés hexagonaux globaux. Bien souvent - c'est le cas sur les espaces projectifs - un tel objet va présenter des singularités. On se propose, moyennant des hypothèses de type Fuchs, de donner une description des feuilles comme niveaux de fonctions multivaluées de type Liouville ($\sum \lambda_i \operatorname{Log} f_i + H$, f_i et H holomorphes). Ce travail est motivé par la description de la variété des feuilletages algébriques de codimension un sur les espaces projectifs $\mathbb{CP}(n)$.

I - Généralités

§ I.1. d-tissus sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Dans ce qui suit on use et abuse de la référence [C , G] ainsi que de l'exposé de Beauville au séminaire Bourbaki [B]. Tous les énoncés sont **locaux** et l'on doit entendre "quitte à diminuer l'ouvert de définition U".

Définition 1. Un d-web ou un d-tissu $\mathcal{W}$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ est la donnée de d-feuilletages holomorphes $\mathcal{F}_i$ de codimension un en position générale. On note $\mathcal{W} = [\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_d]$.

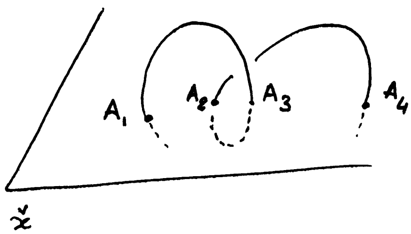
Localement chaque feuilletage $\mathcal{F}_i$ est donné par les niveaux d'une submersion holomorphe u_i ; on note $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(du_i)$. Si $d \leq n$, tout d-web est localement difféomorphe au d-web standard $[\mathcal{F}(dx_1),\ldots,\mathcal{F}(dx_d)]$, où $x_1,\ldots,x_n$ est un système de coordonnées local de $\mathbb{C}^n$.

Un d-web $\mathcal{W} = [\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_d]$ sur U est **linéaire** si toutes les feuilles des feuilletages $\mathcal{F}_i$ sont les traces sur U d'hyperplans affines.

Un d-web est **linéarisable** s'il est difféomorphe à un d-web linéaire.

Exemple : web associé à une courbe algébrique.

Cet exemple est fameux. Soit $\Gamma \subset \mathbb{CP}(n)$ une courbe algébrique de degré d suffisamment générale pour que ce qui suit ait un sens. Soit $\check{x}_0$ un point général de l'espace dual $\check{\mathbb{CP}}(n)$; si $\check{x}$ est voisin de $\check{x}_0$, l'hyperplan $\check{x}$ (vu dans $\mathbb{CP}(n)$) coupe la courbe Γ en d points distincts, notés $A_1(\check{x}),\dots,A_d(\check{x})$.



Par dualité ces d-points définissent d-hyperplans passant par $\check{x}$ que l'on décide être les feuilles de notre d-web. On munit ainsi un voisinage U de $\check{x}_0$ d'un d-web que l'on note $\mathcal{W}(\Gamma)$; ce d-web est par construction linéaire. Si z_i, $i = 1,\dots,d$, sont des coordonnées locales près du point $A_i(\check{x}_0)$, on peut choisir les $u_i = z_i(A_i)$ comme fonctions définissant nos d-feuilletages : $\mathcal{W}(\Gamma) = [\mathcal{F}(du_1),\dots,\mathcal{F}(du_d)]$. Mais d'autres choix sont évidemment possibles ; ainsi si w est une forme différentielle holomorphe sur Γ, les fonctions :

$$\int_{A_i(\check{x}_0)}^{A_i(\check{x})} w$$

définissent pour $\check{x} \in U(\check{x}_0)$ des fonctions donnant encore nos feuilletages ; notamment :

$$(1) \qquad \int_{A_i(\check{x}_0)}^{A_i(\check{x})} w = \ell_i^w(u_i(\check{x}))$$

où $\ell_i^w(t)$ est holomorphe au voisinage de $u_i(\check{x}_0)$.

Rappelons ici la fameux théorème d'Abel :

(2) La somme $\sum_{i=1}^{d} \int_{A_i(\check{x}_0)}^{A_i(\check{x})} w$ est indépendante de $\check{x} \in U(\check{x}_0)$.

On traduit alors (1) et (2) par :

(3) $$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \ell_i^w}{\partial t}(u_i)\, du_i = 0 .$$

On introduit la :

Définition 2 : Soit $\mathscr{W}(\Gamma) = [\mathscr{F}(du_1),\ldots,\mathscr{F}(du_d)]$ un d-web sur l'ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On appelle relation abélienne une relation de la forme :

(4) $$\sum_{i=1}^{d} f_i(u_i)\, du_i = 0$$

où les f_i sont holomorphes au voisinage de $u_i(x_0) \in \mathbb{C}$, $x_0 \in U$. L'ensemble des relations abéliennes constitue un espace vectoriel $Ab(\mathscr{W})$ dont la dimension $M(\mathscr{W})$ s'appelle le rang du web $\mathscr{W}$.

Revenons au web $\mathscr{W}(\Gamma)$ associé à une courbe de degré d dans $\mathbb{CP}(n)$. On peut démontrer qu'en fait toutes les relations abéliennes sont de type (3) ; une conséquence du théorème d'Abel est donc la suivante :

$$M(\mathscr{W}(\Gamma)) = g(\Gamma) \leq M(n,d)$$

où $g(\Gamma)$ est le genre de la courbe Γ et $M(n,d)$ le maximum du genre pour une courbe de degré d dans $\mathbb{CP}(n)$ (Castelnuovo).

Dans sa thèse Chern démontre que pour un d-tissu sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ on a toujours l'inégalité :

$$M(\mathscr{W}) \leq M(n,d) .$$

On voit ainsi que le maximum du rang est précisément réalisé par les d-webs linéaires $\mathscr{W}(\Gamma)$ associés aux courbes extrémales, i.e. celles ayant le genre maximum dans un degré donné.

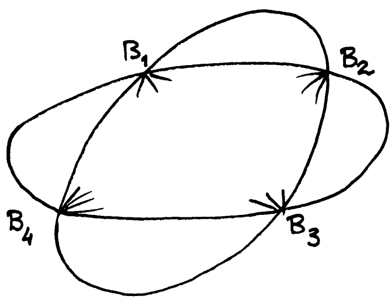
Voici pêle mêle des résultats connus concernant les d-webs linéaires et concernant la linéarisation.

Théorème 1 (Lie-Poincaré-Wirtinger-Griffiths). Soit $\mathscr{W}$ un d-web linéaire sur $U \subset \mathbb{C}^n$ possédant au moins une relation abélienne $\sum f_i(u_i) du_i = 0$, $f_i \equiv 0$ pour tout i. Alors il existe une courbe algébrique Γ dans $\mathbb{CP}(n)$, $U \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}(n)$ tel que $\mathscr{W} = \mathscr{W}(\Gamma)_{|U}$.

Concernant la linéarisation on a le :

Théorème 2 (Chern-Griffiths). Soit $\mathcal{W}$ un d-web sur $U \subset \mathbb{C}^n$ de rang maximal $M(n,d)$; si $n \geq 3$ et $d \leq n+1$ ou $d \geq 2n$ alors $\mathcal{W}$ est linéarisable.

Ainsi pour $n = 3$ et $d \neq 5$ tout d-tissus de rang maximal est linéarisable. Pour $n = 2$ le théorème est inopérant ; ainsi on peut construire un 5-tissu du complément dans $\mathbb{CP}(2)$ d'une courbe γ, de rang maximum et qui ne soit pas linéarisable. Cet exemple est dû à Bol : on se donne quatre points B_i en position générale et l'on considère le feuilletage $\mathcal{F}_i$ dont les feuilles sont les droites passant par B_i. On ajoute à nos quatre feuilletages $\mathcal{F}_i$ le feuilletage $\mathcal{F}_5$ dont les feuilles sont les coniques passant par les B_i (fig.).



On a $M(2,5) = \frac{1}{2}(5-1)(5-2) = 6$ et le 5-webs ci-dessus est effectivement de rang 6, ce qui n'est pas si facile à établir.

En dimension deux les d-tissus de rang maximal qui sont linéarisables ont été récemment classifiés par A. Hénaut dans [H].

§ I.2. Les 3-tissus en dimension deux.

Leur rang est inférieur ou égal à 1. Si l'on dispose d'une relation abélienne non triviale pour $\mathcal{W} = [\mathcal{F}(du_1), \mathcal{F}(du_2), \mathcal{F}(du_3)]$:

$$\ell_1(u_1)du_1 + \ell_2(u_2)du_2 + \ell_3(u_3)du_3 = 0 \tag{5}$$

il est clair que chaque ℓ_i est non identiquement nulle. On peut alors choisir des primitives L_i de ℓ_i de sorte que