L. BARBIERI-VIALE

# Cicli di codimensione 2 su varietà unirazionali complesse

*Astérisque*, tome 226 (1994), p. 13-41

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__226__13_0>

# CICLI DI CODIMENSIONE 2 SU VARIETÀ UNIRAZIONALI COMPLESSE

L. BARBIERI-VIALE

## Premessa

Sia $X$ una varietà algebrica proiettiva e non-singolare. Un problema generale in teoria dei cicli è quello di determinare la "struttura" dei gruppi abeliani nell'estensione

$$0 \to A^i(X) \to CH^i(X) \to NS^i(X) \to 0$$

ovvero il gruppo di Chow $CH^i(X)$ dei cicli di codimensione $i$ modulo equivalenza razionale, il suo sottogruppo $A^i(X)$ dei cicli che sono algebricamente equivalenti a zero ed il gruppo di Néron-Severi $NS^i(X)$. I metodi che affrontano tale problema hanno oggi in comune il fatto d'interpretare i cicli mediante "classi di coomologia"; ad esempio, per una varietà complessa, P.A. Griffiths ha definito un toro complesso $J^i(X)$ ed un'applicazione $\theta^i : A^i(X) \to J^i(X)$, inoltre si ha sempre la mappa ciclo $c\ell^i : NS^i(X) \to H_{\mathbf{Z}}^{i,i}$ nel gruppo di Hodge delle classi intere di tipo $(i, i)$, ma sfortunatamente queste applicazioni non sono surgettive né iniettive, in generale. Per $i = 2$ ed $X$ *unirazionale* o un *fibrato in coniche su una superficie* S. Bloch [7, Prop.1.7 e Prop.1.9] ha mostrato che $\theta^2$ è un'isogenia: ma, come conseguenza del teorema di Merkur'ev-Suslin in $K$-teoria, si ha (cf. [18, §1.3]) che $\theta^2$ è iniettiva sulla torsione quindi $\theta^2$ è un isomorfismo nelle ipotesi precedenti e, come si vedrà nel seguito, $c\ell^2$ è iniettiva.
S. Bloch e D. Quillen [26] hanno ottenuto una mappa ciclo $CH^i(X) \xrightarrow{\simeq} H^i(X, \mathcal{K}_i)$ che identifica i gruppi di Chow alla coomologia di Zariski dei

fasci associati ai gruppi di $K$-teoria algebrica; questo fatto, valido anche per $NS^i(X)$ mediante altre teorie coomologiche (si veda l'Introduzione), permette "magiche" applicazioni (ad esempio che i 2-cicli di $n$-torsione sono in numero finito per $X$ definita su campi finiti o separabilmente chiusi, si veda [14]).
Se $i = 0, 1, \dim X$ ed $X$ è definita su un campo algebricamente chiuso si ha che (a parte il fatto generale che $A^i(X)$ è un gruppo divisibile): per $i = 0$, $A^0(X) = 0$ e $CH^0(X) = NS^0(X) = X\mathbf{Z}$; per $i = \dim X$ si ha ancora $NS_0(X) \cong \mathbf{Z}$ e $A_0(X)_{tors} \cong CH_0(X)_{tors}$ s'identifica alla torsione della varietà di Albanese $Alb(X)$ per un teorema di Roitman; se inoltre $X$ è unirazionale allora $A_0(X) = Alb(X) = 0$ e $CH_0(X) \cong \mathbf{Z}$.
Per $i = 1$ l'estensione

$$0 \to A^1(X) \to CH^1(X) \to NS^1(X) \to 0$$

è tale che $A^1(X)$ è rappresentabile da una varietà abeliana, $CH^1(X) \cong \mathrm{Pic}\,(X)$ e $NS^1(X)$ è finitamente generato. Si pone dunque il problema di ottenere il gruppo $CH^i(X)$ come estensione di una varietà abeliana mediante un gruppo finitamente generato. Un tale risultato è falso, in generale, per $i \geq 2$ ed i gruppi $A^i(X)$ e $NS^i(X)$ ma vi sono, ovvie e meno ovvie, condizioni su $X$ affinchè ciò sia vero. S. Bloch e J. Murre [10] hanno posto il problema della "rappresentabilità" di $A^i(X)$ studiando alcuni esempi di varietà di Fano; il motivo della "semplicità" di queste costruzioni è il risultato di S. Bloch [7, Prop.1.7] che $A^2(X)$ è "rappresentabile" se $X$ è unirazionale. Altrettanto semplicemente, sotto questa ipotesi, si può vedere che $NS^2(X)$ è finitamente generato.

## Introduzione

Sia $X$ una varietà algebrica complessa. Sia $X_{an}$ lo spazio analitico associato e consideriamo le teorie coomologiche $H^*(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^*(X_{an}, A)$ che corrispondono ai fasci costanti $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}/n, \mathbf{C}$ ovvero la coomologia singolare a coefficienti in $A$; ad esempio, per $A = \mathbf{Q}$ si ha $H^*(X_{an}, \mathbf{Q}) = H^*(X_{an}, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$ mentre per $A = \mathbf{Z}/n$ si ottiene $H^*(X_{an}, \mathbf{Z}/n) \cong$

$H^*(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n)$ la coomologia étale del fascio delle radici $n$-esime di 1. Per una tale varietà $X$ fissata, consideriamo inoltre i fasci $\mathcal{H}^*_X(A)$ su $X$ con la topologia di Zariski, associati ai prefasci $U \rightsquigarrow H^*(U_{an}, A)$ . L'obiettivo di questo testo è di raccogliere, sinteticamente, i principali risultati riguardanti i fasci $\mathcal{H}^*$, di esemplificare alcune applicazioni allo studio dei cicli algebrici sulle varietà algebriche complesse proiettive e non-singolari e di porre diverse questioni. Ad esempio, mentre i gruppi di coomologia $H^*(X)$ non sono in generale invarianti birazionali, le sezioni globali dei fasci $\mathcal{H}^*_X(A)$ hanno questa proprietà ed inoltre sono nulle se $X$ è razionale; questo suggerisce il loro impiego nello studio di problemi di razionalità. Una costruzione di J.-L. Colliot-Thélène ed M. Ojanguren [15, §3] permette di trovare varietà unirazionali di dimensione $\geq 6$, con invariante di Artin-Mumford nullo i.e. $H^3(X_{an}, \mathbf{Z})_{tors} = 0$, tali che $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/2)) \neq 0$ e quindi non-razionali, ma sono sconosciuti tali esempi in dimensione inferiore a 6: mostriamo qui (cf. Teorema 5.2) che non esistono in dimensione 3 se la congettura di Hodge a *coefficienti interi* è vera per le classi di tipo $(2,2)$ su $X$.

Grazie a Bloch ed Ogus [11, Cor.7.4] il gruppo $H^p(X, \mathcal{H}^p_X(A))$ si identifica al gruppo di Néron-Severi $NS^p(X) \otimes A$ degli $A$-cicli di codimensione $p$ modulo equivalenza algebrica. Sfruttando l'esistenza di un "misterioso" omomorfismo $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z})) \xrightarrow{\partial} NS^2(X)$ che ha come immagine il gruppo di Griffiths $G^2(X)$, è possibile mostrare [3] che $\partial \neq 0$, ovvero $G^2(X) \neq 0$, è una condizione sufficiente per la non unirazionalità di $X$. Infatti, se $X$ è unirazionale, si dimostra [3] che $H^0(X, \mathcal{H}^i_X(\mathbf{Z})) = 0$ per $i = 1, 2, 3$ e si congettura tale annullamento per ogni $i \neq 0$ (§4, §7).

L'annullamento di $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}))$ ha diverse conseguenze in teoria dei cicli. Ad esempio, implica la finitezza di $CH^2(X)/n$; inoltre, consente d'interpretare il gruppo $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$, per una varietà 3-dimensionale, mediante i 2-cicli trascendenti di $n$-torsione ovvero: ${}_n(H^4(X_{an}, \mathbf{Z})/NS^2(X))$; la non nullità di $H^0(X, \mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))$ equivale all'esistenza di una classe $\zeta$ di Hodge *intera* di tipo $(2,2)$ non algebrica. Discutiamo alcuni esempi di varietà di Fano in cui ciò non può avvenire e mostriamo che $H^0(X,\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}))=0$ se $X$ è un fibrato in coniche su una superficie; in questo caso si ha pure $H^0(X,\mathcal{H}^3_X(\mathbf{Z}/n))=0$ per ogni $n$. Si ha dunque, in questi esempi, che tutti i cicli di Hodge sono algebrici. Infine, per $X$ un fibrato in coniche su una superficie $S$ tale che $A^2(S)$ sia "rappresentabile" o una varietà unirazionale mostriamo che la mappa ciclo

$$c\ell^2_{\mathcal{D}}: CH^2(X)\to H^4_{\mathcal{D}}(X,\mathbf{Z}(2))$$

in coomologia di Deligne-Beilinson è iniettiva; inoltre, ha conucleo finito se ad esempio dim $X=3$ (§6).
Ben lontano dal risultare esauriente, questa esposizione si propone di catturare l'interesse per le problematiche che nascono naturali e promettenti attorno a tali metodologie.
Queste note si avvalgono di generose e corroboranti conversazioni con S. Bloch, J.-L. Colliot-Thélène (che ha inoltre letto e commentato la versione preliminare) e V. Srinivas ai quali rivolgo i miei più sentiti ringraziamenti. Sono infine debitore di oculati suggerimenti da parte di P. Francia, C. Pedrini e S. Verra in occasione di un seminario "genovese".

## Notazioni

Se $G$ è un gruppo (o fascio) abeliano indichiamo: ${}_nG$ e $G/n$ rispettivamente il nucleo ed il conucleo della moltiplicazione per $n$ in $G$. Indichiamo $T(G)$ il 'modulo di Tate' di $G$, ovvero il limite inverso degli ${}_nG$, e $G_{tors}$ il sottogruppo di torsione, ovvero il limite diretto. Indichiamo $\widehat{\mathbf{Z}}$ il completamento profinito di $\mathbf{Z}$. Le varietà sono algebriche, irriducibili e sempre definite su $\mathbf{C}$ se non specificato altrimenti; per una tale varietà $X$ indichiamo $X_{an}$ lo spazio analitico con la topologia usuale e $X_{ét}$ il sito étale di $X$. Denotiamo $K(X)$ il campo delle funzioni razionali su $X$.