SAAD BAAJ

Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz

Astérisque, tome 232 (1995), p. 11-48
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__232__11_0>

REPRESENTATION REGULIERE DU GROUPE QUANTIQUE DES DEPLACEMENTS DE WORONOWICZ

Saad Baaj

Introduction

Soit H un espace de Hilbert. Un unitaire V qui agit dans $H \otimes H$ est dit multiplicatif s'il vérifie la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$. Un unitaire multiplicatif V est dit régulier [4] si l'adhérence normique $\overline{\mathcal{C}(V)}$ de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V) = \{(id \otimes \omega)(\Sigma V) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ de $\mathcal{L}(H)$ où Σ est la volte, coincide avec la C*-algèbre des opérateurs compacts $\mathcal{K}$ dans H ; il est dit irréductible [4] s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant les conditions :

a) $U^2 = 1$ et $(\Sigma(1 \otimes U)V)^3 = 1$

b) l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif.

Dans [4], en collaboration avec G.Skandalis, nous avons associé à tout unitaire multiplicatif régulier V, deux C*-algèbres de Hopf $(S_V, \widehat{S_V})$ en dualité, généralisant ainsi le cas des C*-algèbres de Hopf $(C_0(G), C^*_{red}(G))$ associées à un groupe localement compact G. Comme nous l'avons annoncé dans [4], l'hypothèse de régularité, qui correspond en fait à la dualité de Takesaki-Takai pour les produits croisés de C*-algèbres, n'est pas toujours vérifiée. Citons l'exemple suivant qui sera développé ailleurs [5]. Soit G un groupe localement compact, à tout couple (G_1, G_2) de sous-groupes fermés de G, d'intersection triviale et tel que l'ensemble G_1G_2 soit un ouvert dense dans G, on peut associer, comme [4] dans le cas $G = G_1G_2$, un unitaire multiplicatif V qui correspond au biproduit croisé de [17]. Dans ce cas, l'algèbre $\overline{\mathcal{C}(V)}$ est le produit croisé $C_0(G) \rtimes_{red} (G_1 \times G_2)$ où le sous-groupe G_1 (resp. G_2) agit par translation à droite (resp. à gauche) dans G. Remarquons que la C*-algèbre $C_0(G) \rtimes_{red} (G_1 \times G_2)$ contient la C*-algèbre des opérateurs compacts. Cependant, si $G \neq G_1G_2$, cette C*-algèbre admet plus d'une représentation et donc, dans ce cas, l'inclusion $\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{C}(V)}$ est stricte. Notons cependant que l'unitaire multiplicatif V est irréductible.

Dans cet article, nous dégageons deux conditions plus faibles que les conditions de régularité et d'irréductibilité de [4], qui nous permettent de realiser les constructions de [4] et d'obtenir la plupart de ses résultats. La première condition que nous avons appelée "semi-régularité", revient à demander que l'adhérence normique de $\mathcal{C}(V)$ contienne la C*-algèbre des opérateurs compacts. Une conséquence de cette hypothèse est que $\overline{\mathcal{C}(V)}$ est auto-adjointe et donc par la preuve de (cf. [4] 3.5), l'algèbre réduite S_V et l'algèbre réduite duale $\widehat{S_V}$ sont également auto-adjointes. D'autrepart, nous disons que l'unitaire multiplicatif V est "équilibré" s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $U^2 = 1$ et que l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ soit multiplicatif.

Si V est un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, i.e V et $\widehat{V}$ semi-réguliers, nous montrons (paragraphe 3) que les C*-algèbres S_V et $\widehat{S_V}$ peuvent être munies de structures de C*-algèbres de Hopf bisimplifiables naturelles. Nous montrons également que les constructions et les résultats de ([4] appendice) restent valables dans ce cadre. En particulier, si W est l'unitaire multiplicatif associé à une représentation covariante (cf. [4] appendice) d'un unitaire multiplicatif V satisfaisant aux conditions précédentes, l'algèbre réduite S_W (resp. l'algèbre réduite duale $\widehat{S_W}$), munie du coproduit $\delta(x) = W(x \otimes 1)W^*$ (resp. $\widehat{\delta}(x) = W^*(1 \otimes x)W$) est une C*-algèbre de Hopf isomorphe à la C*-algèbre de Hopf S_V (resp. $\widehat{S_V}$).

Notons que dans le cas non régulier, on ne peut espérer obtenir la dualité de Takesaki-Takai pour les produits croisés de C*-algèbres. Cependant, comme l'hypothèse de semi-régularité implique la "régularité au sens faible", i.e l'adhérence faible de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V)$ coincide avec $\mathcal{L}(H)$, la méthode de [11] s'adapte dans le cadre des unitaires multiplicatifs irréductibles semi-biréguliers pour établir la dualité de Takesaki pour les produits croisés d'algèbres de von Neumann.

Dans le paragraphe 4, nous étudions un exemple important d'unitaire multiplicatif irréductible, semi-birégulier mais non régulier : la représentation régulière du groupe quantique [25,26] des déplacements $E_\mu(2)$ de Woronowicz. Rappelons qu'étant donné un nombre réel $\mu > 1$, la C*-algèbre de Hopf (A, δ) des "fonctions continues sur $E_\mu(2)$ tendant vers 0 à l'infini" est [25] le produit croisé $A = C_0(\mathbf{C}_\mu) \rtimes_\alpha \mathbf{Z}$ où $\mathbf{C}_\mu = \{z \in \mathbf{C} \ / \ |z| \in \mu^{\mathbf{Z}}\} \cup \{0\}$, pour l'action définie par $\alpha(f)(\zeta) = f(\mu^{-1}\zeta)$. Il est facile de deviner [3] une mesure positive ν sur l'espace $\mathbf{C}_\mu$ telle que le poids dual ([15], [22]) correspondant Φ soit une mesure de Haar pour $E_\mu(2)$. La preuve de l'invariance à gauche et à droite de cette mesure de Haar est alors basée sur l'expression de ce poids Φ comme une somme de formes positives sur A et sur le calcul du produit de convolution de ces formes.

Comme nous le montrons dans un cadre assez général au paragraphe 2, à toute C*-algèbre de Hopf munie d'une mesure de Haar, nous associons une isométrie pentagonale qui correspond dans le cas des groupes à la représentation régulière. Dans le cas du groupe quantique $E_\mu(2)$, l'isométrie V obtenue est un unitaire multiplicatif semi-régulier mais non régulier. Comme on peut s'y attendre dans une "situation avec mesure de Haar", la représentation régulière V est irréductible. Nous montrons que la C*-algèbre de Hopf réduite (S_V, δ_V) coincide avec (A, δ) et que la C*-algèbre de Hopf réduite duale $\widehat{S_V}$ munie du coproduit opposé est isomorphe à la C*-algèbre de Hopf [26] des "fonctions continues sur le dual de Pontrjagyn $\widehat{E_\mu(2)}$ tendant vers 0 à l'infini" au sens de Woronowicz.

Par les résultats du paragraphe 3 et la moyennabilité de $E_\mu(2)$ et de $\widehat{E_\mu(2)}$, nous savons que les représentations (resp. coreprésentations) de V sont les représentations de la C*-algèbre $\widehat{S_V}$ (resp. S_V). S'appuyant sur la description (théorème 4.10) de l'unitaire multiplicatif V comme multiplicateur de la C*-algèbre $\widehat{S_V} \otimes S_V$, on peut déduire la description [26] des représentations du groupe quantique $E_\mu(2)$ donné par Woronowicz.

Une autre conséquence de la moyennabilité de $E_\mu(2)$ est que le produit croisé réduit $S_V \rtimes \widehat{S_V}$ coincide avec le produit croisé "max". Il s'ensuit que les représentations de la C*-algèbre $B = S_V \rtimes \widehat{S_V}$ coincident avec les représentatons covariantes [4] de l'unitaire multiplicatif V. Nous montrons que la C*-algèbre B est une extension des opérateurs compacts par les compacts. Il en résulte que V n'admet que deux représentations covariantes : la représentation régulière et une deuxième que nous décrivons.

Nous terminons le paragraphe 4 par le calcul des mesures de Haar duales et de leur théorie modulaire. Pour déduire les mesures de Haar duales à partir de la mesure de Haar Φ, on peut procéder comme dans le cas classique des algèbres de Kac ([12], [13], [16], [24]), i.e construire des algèbres hilbertiennes à gauche et montrer que les poids correspondants ([8], [22]) vérifient les propriétés d'invariance voulues. Pour garder à cet article une longueur raisonnable, nous avons préféré procéder directement en donnant les formes positives sur $\widehat{S_V}$ qui permettent d'exprimer les mesures de Haar duales comme somme de formes positives ; le calcul de leur produit de convolution permet alors comme dans le cas de Φ, de montrer les propriétés d'invariance . Nous montrons ensuite que les théories modulaires de Φ et des mesures de Haar duales $\widehat{\Phi}$ et $\widehat{\Psi}$ vérifient la conjecture de ([21] paragraphe 6.).

S'appuyant sur une conséquence du formulaire de [21], nous montrons que le poids $\Phi \otimes \widehat{\Phi}$ est une mesure de Haar invariante à gauche et à droite sur le double quantique ([4], [28]) de $E_\mu(2)$. Procédant comme dans le cas classique, on peut déduire dans ce cas les mesures de Haar duales et montrer que leur théorie modulaire satisfait le formulaire de [21].

Enfin, dans une première appendice, nous rassemblons les propriétés que nous avons utilisées dans le paragraphe 4, des coefficients de Fourier $(A(m,n))_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$ de la suite de fonctions notée $(U(m,.))_{m\in\mathbf{Z}}$ introduite par Woronowicz dans [25]. Dans une seconde appendice, nous complétons la preuve du théorème 4.2 et nous montrons l'unicité de la mesure de Haar de $E_\mu(2)$.

Durant l'élaboration de cet article, j'ai bénéficié de nombreuses et fructueuses discussions avec G.Skandalis sur ce sujet ; je l'en remercie très sincèrement.

1. Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous fixons les notations constamment utilisées dans la suite et nous rappelons quelques définitions.

Soit E un espace de Banach et $X \subset E$ un sous-ensemble de E. Nous notons $\overline{X}$ l'adhérence de X dans E et nous désignons par $\overline{lin}\ X$ l'espace vectoriel fermé engendré par X dans E.

Tous les produits tensoriels de C*-algèbres, sauf mention expresse du contraire, sont supposés munis de la norme spatiale (produits tensoriels "min").

Soit A une C*-algèbre, nous notons $\widetilde{A}$ la C*-algèbre obtenue à partir de A par adjonction d'un élément unité et $M(A)$ la C*-algèbre des multiplicateurs [18] de A. Si J est un idéal bilatère fermé de A, on pose $M(A, J) = \{m \in M(A) \ / \ mA + Am \subset J\}$.

Un homomorphisme de C*-algèbres $\pi : A \to M(B)$ est dit non dégénéré si, pour une unité approchée (e_i) de A, $\pi(e_i) \to 1$ pour la topologie stricte.

1.1. DÉFINITION. — *(cf. [4]) Une C*-algèbre de Hopf est un couple (A, δ) où A est une C*-algèbre et $\delta : A \to M(\tilde{A} \otimes A + A \otimes \tilde{A}; A \otimes A)$ est un homomorphisme non dégénéré, appelé le coproduit de A, vérifiant $(id \otimes \delta)\delta = (\delta \otimes id)\delta$. Une C*-algèbre de Hopf est dite bisimplifiable si on a $A \otimes A = \overline{lin}\ \delta(A)(1 \otimes A) = \overline{lin}\ \delta(A)(A \otimes 1)$.*

Soit H un espace de Hibert, si $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$, on définit $T_{12}, T_{13}, T_{23} \in \mathcal{L}(H \otimes H \otimes H)$ comme dans [4]. On note $\Sigma \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ la volte donnée par $\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$ et on pose $T_{21} = \Sigma T \Sigma$.

Pour $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on définit les opérateurs $(id \otimes \omega)(T)$ et $(\omega \otimes id)(T)$ par les formules :

$$(\xi \mid (id \otimes \omega)(T)\eta) = \omega(\theta_\xi^* T \theta_\eta) \quad , \quad (\xi \mid (\omega \otimes id)(T)\eta) = \omega(\theta'^*_\xi T \theta'_\eta)$$

où $\theta_\xi, \theta'_\eta \in \mathcal{L}(H, H \otimes H)$ sont définies par $\theta_\xi(\eta) = \theta'_\eta(\xi) = \xi \otimes \eta$.

1.2. DÉFINITION. — *(cf. [4]) Un unitaire $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est dit multiplicatif s'il vérifie la relation pentagonale :*

$$V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}$$

Si $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on pose $L(\omega) = (\omega \otimes id)(V)$ et $\rho(\omega) = (id \otimes \omega)(V)$. L'algèbre réduite [4] (resp. l'algèbre réduite duale) S_V (resp. $\widehat{S_V}$) de V est par définition l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(H)$ de la sous-algèbre $A(V) = \{L(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ (resp. $\widehat{A}(V) = \{\rho(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$). Quand aucune confusion n'est possible, on note simplement S et $\widehat{S}$ ces algèbres.

Une représentation [4] (resp. coreprésentation) de V dans l'espace de Hilbert K est un unitaire $X \in \mathcal{L}(K \otimes H)$ (resp. $X \in \mathcal{L}(H \otimes K)$) vérifiant la relation $X_{12} X_{13} V_{23} = V_{23} X_{12}$ (resp. $V_{12} X_{13} X_{23} = X_{23} V_{12}$). Dans ce cas, pour tout $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on pose $\rho_X(\omega) = (id \otimes \omega)(X)$ (resp. $L_X(\omega) = (\omega \otimes id)(X)$) ; l'espace vectoriel $\widehat{A_X} = \{\rho_X(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ (resp. $A_X = \{L_X(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$) est une sous-algèbre ([4] A.3) de $\mathcal{L}(K)$; on note alors $\widehat{S_X}$ (resp. S_X) son adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$.

Une représentation covariante ([4] appendice) de V dans un espace de Hilbert K est un couple (X, Y) où X est une représentation et Y est une coreprésentation de V dans le même espace de Hilbert K vérifiant la relation de covariance $Y_{12} V_{13} X_{23} = X_{23} Y_{12}$.