D. BAKRY

Remarques sur les semigroupes de Jacobi

Astérisque, tome 236 (1996), p. 23-39
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__23_0>

Remarques sur les semigroupes de Jacobi

D. Bakry

Résumé. — Après une première partie montrant les connexions entre les semigroupes de JACOBI et le laplacien sphérique, nous donnons une estimation de la constante de SOBOLEV de ces semigroupes.

Les semigroupes de diffusion sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ont en général une mesure stationnaire réversible. Intéressons-nous, parmi ceux-ci, à ceux dont la mesure stationnaire est une probabilité, qui ont un spectre discret et tels que les vecteurs propres successifs forment une suite de polynômes (nécessairement orthogonaux pour la mesure réversible) : ce sont donc les semigroupes de diffusion naturellement associés à des familles de polynômes orthogonaux. Il est alors facile de voir qu'il n'y en a, à affinité près, que 3 familles, caractérisées par leur générateur infinitésimal L (cf [M], par exemple) :

— Les semigroupes de JACOBI, définis sur $]-1,1[$, de générateur

$$L = (1-x^2)d^2/dx^2 - (ax+b)d/dx, \text{ avec } a \pm b > 0\,;$$

— Les semigroupes de LAGUERRE, définis sur $]0,\infty[$, de générateur

$$L = xd^2/dx^2 - (x+b)d/dx, \text{ avec } b < 0\,;$$

— Le semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK , défini sur $\mathbb{R}$, de générateur

$$L = d^2/dx^2 - xd/dx.$$

Les deux dernières familles apparaissent comme des limites (convenablement renormalisées), de semigroupes de la première famille, et on voit donc que les semigroupes de JACOBI forment le modèle générique de tels semigroupes.

Le cas symétrique ($b = 0$) est lié, lorsque le paramètre a est demi-entier, à la partie radiale du laplacien sphérique, et a donc été de ce fait intensivement étudié. Il présente de nombreuses propriétés remarquables qui en rendent l'étude assez facile. Dans le cas non symétrique, beaucoup de questions restent posées, en particulier du côté des inégalités de SOBOLEV, de SOBOLEV logarithmiques, etc. Le but de cet exposé est de montrer qu'en fait les semigroupes de JACOBI dissymétriques ont également une interprétation géométrique simple pour certaines valeurs des paramètres, et de donner des estimations sur les constantes des inégalités de SOBOLEV optimales qui leur sont associées.

Malheureusement, alors que la plupart de ces constantes sont assez faciles à calculer dans le cas symétrique, il n'en est pas de même dans le cas dissymétrique, et c'est pourquoi nous devons alors nous contenter d'encadrements.

1— Quelques considérations géométriques.

Toutes les remarques qui suivent peuvent se trouver de façon plus détaillée dans l'exposé [M]. Rappelons tout d'abord la forme des opérateurs de JACOBI : ce sont des opérateurs différentiels du second ordre agissant sur les fonctions deux fois dérivables définies sur l'intervalle $]-1,1[$ par la formule

$$L(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - (ax+b)f'(x).$$

Dans ce qui suit, nous poserons $a = \frac{n+1}{2}$ et $b = a-p$. Pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans la suite, nous choisirons toujours $n \geq 1$ et $p \in [1,n]$. Nous poserons ensuite $q = n+1-p$, et nous utiliserons les lettres p et q pour désigner l'opérateur:

$$L_{p,q}(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - \frac{1}{2}\{(p+q)x + q - p\}f'(x),\ p \geq 1,\ q \geq 1.$$

Remarquons que le changement de x en $-x$ transforme $L_{p,q}$ en $L_{q,p}$. Lorsque $p = q$, nous noterons tout simplement l'opérateur L_p : il s'agit du cas de l'opérateur ultrasphérique.

Ce que nous voulons montrer dans ce paragraphe, c'est que, pour des valeurs entières des paramètres p et q, l'opérateur de JACOBI s'interprète naturellement comme une image du laplacien sur la sphère de dimension n (avec comme plus haut $n = p+q-1$).

Pour les lecteurs qui n'aiment pas la géométrie différentielle, la façon la plus simple de se représenter le laplacien sphérique est sans doute la suivante : appelons S_n la sphère de rayon 1 et de dimension n plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, et considérons une fonction suffisamment dérivable f définie sur S_n. On prend un prolongement $\hat{f}$ de cette fonction à un voisinage de S_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui soit indépendant du rayon (et alors la notion de "suffisamment dérivable" peut se définir à partir de cette fonction $\hat{f}$), puis on calcule le laplacien ordinaire de cette fonction dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La restriction de ce laplacien à S_n donne par définition le laplacien sphérique de la fonction f, que nous noterons $\Delta_{S_n}(f)$.

Si l'on veut exprimer ce laplacien, et qu'on n'aime pas trop les angles d'EULER, il y a une façon de le faire qui donne une expression raisonnable. Tout d'abord, il est clair sur la définition que l'opérateur est local, et qu'il est également invariant par les transformations orthogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$, car c'est le cas du laplacien ordinaire de $\mathbb{R}^{n+1}$. On peut se contenter de calculer $\Delta_{S_n}(f)$ losqu'on connait f seulement au voisinage d'un point, et, à cause de l'invariance, on ne perd rien à supposer que ce point est $(0, \cdots, 0, 1)$. On va alors prendre comme voisinage la demisphère supérieure $\{x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S_{n+1} \,/\, x_{n+1} > 0\}$. Un point de cette demisphère est repéré par ses coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ sur le disque de rayon unité de $\mathbb{R}^n$, et l'on peut alors définir la fonction f dans cette demisphère par sa valeur sur la boule $f(x_1, \cdots, x_n)$, ainsi que son laplacien.

Le lecteur un peu courageux peut alors faire le calcul à la main, et voit que l'on obtient ainsi

$$\Delta_{S_n}(f)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - n \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\delta x_i}.$$

(Ici, δ_{ij} désigne comme d'habitude le symbole de KRONECKER.) On a évidemment exactement la même expression pour la demisphère inférieure. En particulier, si la fonction f est invariante par la symétrie par rapport à l'hyperplan $\{x_{n+1} = 0\}$, il en de même de son laplacien (mais ceci n'est qu'un cas particulier de l'invariance par rotation que nous avons évoquée plus haut).

Une des propriétés remarquables de cet opérateur est que le résultat $\Delta_{S_n}(f)(x)$ ne dépend que des variables dont dépend la fonction f elle même. En particulier, si la fonction f ne dépend que des p variables $(x_1, \cdots, x_p)$, $(1 \leq p \leq n)$, il en va de même de son laplacien (c'est une fois de plus un cas particulier de l'invariance par les transformations orthogonales). On peut alors relever toute fonction g définie sur le disque de $\mathbb{R}^p$ en une fonction f définie sur la demisphère supérieure de $\mathbb{R}^{n+1}$ (voire en une fonction définie sur la sphère toute entière pourvu que g ait un comportement ad hoc au voisinage du bord du disque), prendre son laplacien sphérique et obtenir ainsi une nouvelle fonction définie sur le disque de $\mathbb{R}^p$: ceci nous définit un nouvel opérateur sur le disque de $\mathbb{R}^p$ qui est

$$\Delta_{n,p}(g)(x) = \sum_{i,j=1}^{p} (\delta_{ij} - x_i x_j) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - n \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial g}{\delta x_i}.$$

C'est presque le même opérateur que précédemment, à ceci près que le coefficient n qui apparaît devant le terme du premier ordre n'est pas la dimension du disque, mais un entier supérieur à p : en fait, rien ne nous oblige à ne considérer que des coefficients n entiers dans la formule précédente, et nous avons ainsi réalisé sur le disque unité de $\mathbb{R}^p$ une famille à un paramètre n d'opérateurs qui s'interprètent pour n entier comme des projections de laplaciens sphériques.

Ces opérateurs ont quantité de propriétés intéressantes (ce sont des quasi-laplaciens de courbure et dimension constantes au sens de [B1]), mais nous n'avons pas l'intention ici de nous attarder sur eux.

Remarquons que pour $p = 1$ nous obtenons ainsi l'opérateur de JACOBI symétrique de paramètres $L_n = L_{n,n}$ ce qui explique que cet opérateur soit appelé l'opérateur ultrasphérique lorsque n est non entier. (On l'appelle aussi opérateur de GEGENBAUER.)

Mais nous pouvons faire un peu mieux si l'on observe que l'opérateur $\Delta_{n,p}$ préserve les fonctions radiales dans le disque unité de $\mathbb{R}^p$: si l'on pose $r = (\sum_1^p x_i^2)^{1/2}$, on a, pour $f(x) = g(r)$,

$$\Delta_{n,p}^{(r)}(f)(x) = (1-r^2)g''(r) + (\frac{p-1}{r} - nr)g'(r).$$

Appelons donc $\Delta_{n,p}^{(r)}$ cet opérateur, agissant sur les fonctions définies sur $]0,1[$:

$$\Delta_{n,p}^{(r)} = (1-r^2)\frac{d^2}{dr^2} + (\frac{p-1}{r} - nr)\frac{d}{dr}.$$

Si l'on pose $r = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, de façon à ce que x varie dans l'intervalle $]-1,1[$, alors l'opérateur $\Delta_{n,p}^{(r)}$ s'écrit

$$\Delta_{n,p}^{(r)} = 4\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - (\frac{n+1}{2}x + \frac{n+1}{2} - p)\frac{d}{dx}\} = 4L_{p,q},$$

où $L_{p,q}$ est l'opérateur de JACOBI, avec $q = n+1-p$.

Qu'a-t-on fait lorsque $p = 1$? Nous avons remplacé l'opérateur L_n par l'opérateur $L_{1,n}$ en le faisant agir sur les fonctions paires (ou, si l'on préfère, en restreignant son intervalle de définition à $]0,1[$, et en faisant un changement de variables). En d'autres termes, les opérateurs L_n et $4L_{1,n}$ sont exactement les mêmes (localement) : mais on verra plus bas que ce sont leurs propriétés globales qui diffèrent. Comme c'est le dogme en géométrie riemannienne, on ne distingue pas deux quantités (par exemple deux opérateurs) qui se transforment l'une en l'autre par un changement de variables, même si ici tout se passe en dimension 1!

Remarquons d'autre part que nous avons ainsi obtenu, pour n entier, deux interprétations différentes de l'opérateur L_n : tout d'abord en projetant directement la sphère S_n en dimension 1, ou encore en projetant d'abord la sphère S_{2n-1} sur le disque de dimension n, et ensuite en prenant une partie radiale (à un facteur 4 près). Même pour $n = 2$, il ne paraît pas évident de voir pourquoi cela donne le même résultat. De même, le fait que $L_{p,q}$ soit essentiellement le même que $L_{q,p}$ ne semble pas se traduire facilement dans ce contexte.

De même que l'opérateur L_n peut s'interpréter comme la partie radiale du laplacien sphérique, l'opérateur $L_{n,1}$, toujours à un facteur 4 près, s'interprètera comme la partie radiale du laplacien sur l'espace projectif, qui est le quotient de la sphère obtenue en identifiant deux points diamétralement opposés.

Ceci n'est qu'un cas particulier d'un phénomène plus général : tous les espaces symétriques compacts de rang 1 ont pour partie radiale du laplacien des opérateurs de JACOBI : le lecteur intéressé pourra trouver la liste suivante dans [G] ou dans [SC], où n désigne la dimension réelle de l'espace symétrique :