M. PRATELLI

Quelques résultats de calcul stochastique et leur application aux marchés financiers

Astérisque, tome 236 (1996), p. 277-289

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__277_0>

Quelques résultats de calcul stochastique
et leur application aux marchés financiers.

M. Pratelli

Résumé. — Nous donnons quelques résultats d'intégration stochastique et de théorie générale des processus, qui peuvent être appliqués dans l'étude des modèles stochastiques pour les marchés financiers.

Un article de P.– A. Meyer ([Me1]), qui remonte à il y a vingt ans, débute par cette phrase: «Aux gens qui disent que les probabilités sont une branche des mathématiques appliquées, nous répondons depuis des années que les probabilités que *nous* faisons, au moins, ne peuvent servir à rien. Il faut se détromper: la solution de certains problèmes posés par les ingénieurs exige maintenant une partie de l'arsenal de la "théorie générale des processus".»

La théorie de l'intégration stochastique (que j'eus la chance d'apprendre de bonne source en suivant, en 1975, le cours de M. Meyer qui devait donner lieu à [Me2]) s'est avérée très efficace dans plusieurs applications. La plus récente, et peut-être la plus frappante, de ces applications est celle qui concerne la construction de modèles pour les marchés financiers. Des problèmes tels que l'existence d'une "probabilité martingale équivalente" (voir [St],[De],[DS]) ou la recherche de stratégies de couverture des options qui minimisent le risque (voir [FS],[Sc]) ne peuvent être abordés avec le seul support de la théorie d'Itô: ils exigent en effet tout l'arsenal des résultats de "l'Ecole de Strasbourg".

Cette note a été inspirée par la lecture de l'article [AH], dans lequel les auteurs considèrent un marché financier avec un ensemble dénombrable d'actifs: après avoir introduit la notion de "marché approximativement complet", ils donnent un exemple d'un marché qui satisfait à cette condition et dans lequel l'unicité de la "probabilité martingale équivalente" n'a pas lieu.

Dans le premier paragraphe de cette note on étend aux espaces $\mathcal{H}^p$ de martingales locales la théorie de l'intégrale stochastique vectorielle isométrique (exposée, pour le cas $p = 2$, dans le livre [Mt]). Cette extension est utilisée dans le paragraphe suivant pour obtenir une formule de représentation de certains sous–espaces stables de $\mathcal{H}^p$

(qui étend au cas de dimension infinie des résultats du chapitre 4 du livre de Jacod [Ja]).

Les notions ainsi introduites permettent de donner une formule de représentation pour la notion de "marché approximativement complet" introduite par Artzner et Heath.

Dans le troisième paragraphe on prouve que l'extrémalité de la probabilité martingale est réduite à l'unicité de la probabilité martingale équivalente dans le cas où l'on remplace la notion de martingale per celle de "martingale stricte". Cette dernière notion semble être suffisamment large pour couvrir les principales applications aux marchés financiers.

Enfin, dans le quatrième paragraphe on indique comment les résultats précédents peuvent être appliqués aux marchés financiers.

Je profite de cette occasion pour évoquer un ami disparu, Michel Métivier, et un colloque que j'avais eu avec lui à Pise, dans un bureau de la Scuola Normale Superiore. Je lui avais exposé le contenu des deux premiers paragraphes de cette note, et il m'avait encouragé à le publier. Si je ne le fais qu'aujourd'hui, c'est parce que j'en cherchais des applications.

0. Notations

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t<\infty}$ satisfaisant aux conditions habituelles.

A tout processus croissant A (adapté et continu à droite), on associe la mesure μ_A, sur $]0,\infty[\,\times\,\Omega$, définie par

$$\mu_A(B) = \mathbf{E}\left[\int_{]0,\infty[} I_B(s,\omega)\, dA_s(\omega)\right].$$

Etant donnés deux espaces de Hilbert séparables $\mathbb{H}, \mathbb{G}$ (dont les normes seront indiquées par $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ et par $|\cdot|_{\mathbb{G}}$ respectivement), on considère l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$ (avec la norme $\|\cdot\|$), ainsi que le sous–espace $\mathcal{L}_1(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs nucléaires (avec la norme $\|\cdot\|_1$) et le sous–espace $\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt (avec la norme $\|\cdot\|_2$).

Dans les deux premiers paragraphes, le lecteur est supposé être familier avec les notions et les notations introduites dans le livre de Métivier ([Mt]). On trouvera notamment dans ce livre, pour une martingale locale M à valeurs dans $\mathbb{H}$, la définition du processus croissant $[M]_t$, ainsi que celle du processus $[\![M]\!]_t$ à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H},\mathbb{H})$.

Dans le troisième paragraphe, qui est indépendant des deux premiers, et où l'on considère des processus à valeurs réelles, les notations sont plutôt celles du livre de Jacod ([Ja]).

1. Utilisation des espaces $\mathcal{H}^p$ dans l'intégration stochastique vectorielle.

On désigne par $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$ (pour $1 \leq p \leq \infty$) l'espace des martingales locales M, à valeurs dans $\mathbb{H}$, telles que la variable aléatoire

$$M^* = \sup_{0 \leq t < \infty} |M_t|_{\mathbf{H}}$$

appartienne à L^p. Il s'agit d'un espace de Banach (avec la norme évidente). On le désignera simplement par $\mathcal{H}^p$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. La célèbre inégalité de Burkholder–Davis–Gundy affirme l'existence, pour $1 \leq p < \infty$, de deux constantes c_p, C_p telles que l'on ait

$$c_p \, \|M^*\|_{L^p} \leq \left\| [M]_\infty^{1/2} \right\|_{L^p} \leq C_p \, \|M^*\|_{L^p} \, .$$

(Pour une démonstration synthétique, voir le chap. 11 de [MP].)

Proposition 1.1 *Pour toute martingale locale M, il existe un processus R_M fortement optionnel, à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, avec $\|R_M\|_1 = 1$ et tel que l'on ait*

$$[\![M]\!]_t = \int_{[0,t]} R_M(s) \, d[M]_s.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la décomposition $M = M^c + M^d$, où M^c désigne la partie martingale continue. Le théorème 21.6 de [Mt] assure l'existence d'un processus Q_M fortement optionnel, à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, avec $\|Q_M\|_1 = 1$ et tel que l'on ait

$$\langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle_t = \int_{[0,t]} Q_M(s) \, d\langle M^c \rangle_s.$$

Posons

$$B = \{(s, \omega) : \ \Delta M_s(\omega) \neq 0\},$$

et désignons par R_M le processus qui coïncide avec $\Delta M_s^{\otimes 2} / |\Delta M_s|_{\mathbf{H}}^2$ sur B, et avec Q_M sur B^c. Puisque B est négligeable pour la mesure associée à $\langle M^c \rangle$, on a

$$\langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle_t = \int_{[0,t]} Q_M \, I_{B^c} \, d\langle M^c \rangle = \int_{[0,t]} R_M \, I_{B^c} \, d[M].$$

On a en outre

$$[\![M^d]\!]_t = \sum_{s \leq t} \Delta M_s^{\otimes 2} = \int_{[0,t]} R_M \, I_B \, d[M].$$

La relation

$$[\![M]\!] = \langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle + [\![M^d]\!]$$

montre alors que le processus R_M possède les propriétés désirées.

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{E}\left(\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G})\right)$ constitué par les processus prévisibles élémentaires à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G})$, c'est-à -dire par les processus de la forme

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, I_{]s_i,t_i]\times F_i}(t,\omega),$$

où les a_i sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G})$ et où les rectangles $]s_i, t_i] \times F_i$ sont deux à deux disjoints, avec $F_i \in \mathcal{F}_{s_i}$ pour tout i.

Lemme 1.2 *Etant donnés un élément X de $\mathcal{E}\left(\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G})\right)$ et une martingale M, posons $N_t = \int_{[0,t]} X \, dM$. On a alors*

$$[\![N]\!]_t = \int_{[0,t]} (X \circ R_M \circ X^*) \, d[M].$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que l'on a

$$N^c = \int X \, dM^c, \qquad N^d = \int X \, dM^d.$$

La formule à démontrer est déjà connue pour la partie martingale continue. Pour l'autre partie, elle découle de la relation suivante:

$$\sum\nolimits_{s\leq t} \Delta N_s^{\otimes 2} = \sum\nolimits_{s\leq t} (X_s \circ \Delta M_s)^{\otimes 2} = \sum\nolimits_{s\leq t} X_s \circ \Delta M_s^{\otimes 2} \circ X_s^*.$$

On remarquera que la formule du Lemme précédent entraîne notamment

$$\begin{aligned} [N]_t = \text{ trace}\left([\![N]\!]_t\right) &= \int_{[0,t]} \text{trace } (X \circ R_M \circ X^*) \, d[M] \\ &= \int_{[0,t]} \left\| X \circ R_M^{1/2} \right\|_2^2 d[M]. \end{aligned}$$

Lemme 1.3 *Soient A un processus croissant et (K_n) une suite de processus optionnels. Pour un exposant p, avec $1 \leq p < \infty$, on suppose que l'on ait*

$$\lim_n \mathbf{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} K_n^2 \, dA\right)^{p/2}\right] = 0.$$