J.-P. THOUVENOT

Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique

Astérisque, tome 236 (1996), p. 303-308

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__303_0>

Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique

J.-P. Thouvenot

Résumé. — Les processus gaussiens peuvent constituer, en théorie ergodique, une source intéressante d'exemples et permettre de répondre très efficacement (grâce à des outils spécifiques) à des questions variées.

Nous montrons ainsi que, dans un K-système, une algèbre parfaite n'est pas nécessairement parfaite dans tous les facteurs.

Nous construisons ensuite un exemple de discontinuité de l'entropie directionnelle.

Nous donnons enfin un exemple de processus gaussien où tous les facteurs sont "à une extension par un groupe compact près" encore gaussiens.

Un lemme va jouer un rôle important dans les exemples qui suivent :

Lemme 1 : *Soit $(X, \mathcal{A}, m)$ un espace probabilisé et $H \subset \mathrm{L}_0^2(X, \mathcal{A}, m)$ (les fonctions d'intégrale nulle) un espace gaussien.*

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces fermés de H. Alors

$$\mathcal{B}(H_1 \cap H_2) = \mathcal{B}(H_1) \wedge \mathcal{B}(H_2) .$$

(Si K est un sous-espace fermé de H, par $\mathcal{B}(K)$ on désigne la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ qui rend mesurables toutes les variables aléatoires qui sont dans K.)

Démonstration : on pose $\mathcal{B}(H_1) = \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}(H_2) = \mathcal{B}_2$. On considère l'opérateur A de $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}(H))$ dans $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}(H))$ donné par $A = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}$. Alors A est un opérateur positif (au sens hilbertien) puisque $\int Af \cdot f \, dm = \|\mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}\mathbb{E}^{\mathcal{B}_2} f\|_2^2$. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est exactement $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2)$. On considère maintenant l'opérateur A_0 de H dans H qui est donné par le produit $\mathrm{P}_{H_2}\mathrm{P}_{H_1}\mathrm{P}_{H_2}$. (Par P_{H_i}, $i = 1, 2$, on désigne la projection sur le sous-espace H_i). C'est encore un opérateur positif et le sous-espace propre correspondant à la valeur propre 1 de A_0 est exactement $H_1 \cap H_2$. Si l'on considère le développement en chaos de $\mathrm{L}_0^2(\mathcal{B}(H))$ donné par l'identification $\sum_{n \geq 1} H^{n\odot}$ (où $H^{n\odot}$ désigne la n-ième puissance tensorielle symétrique de H, voir [6]), pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_i}$ commute avec la projection sur $H^{n\odot}$, et restreint à $H^{n\odot}$,

$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_i} = \mathrm{P}^{n\odot}_{H_i}$ $(i = 1, 2)$. Il en résulte que, pour tout $n \geq 1$, A commute avec la projection sur $H^{n\odot}$, et que, restreint à $H^{n\odot}$,

$$A = \mathrm{P}^{n\odot}_{H_2}\,\mathrm{P}^{n\odot}_{H_1}\,\mathrm{P}^{n\odot}_{H_2} = A_0^{n\odot}\,.$$

La restriction à $H^{n\odot}$ du sous-espace propre de A correspondant à la valeur propre 1 est exactement $(H_1 \cap H_2)^{n\odot}$. Ceci achève la démonstration (puisque $\mathrm{L}^2_0\mathcal{B}(H_1 \cap H_2) = \sum_{n\geq 1}(H_1 \cap H_2)^{n\odot}$).

— I —

On considère un système dynamique $(X, \mathcal{A}, m, T)$. On dit qu'une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant

1) $T\mathcal{B} \supset \mathcal{B}$

2) $\lim_{n\uparrow+\infty} T^n\mathcal{B} = \mathcal{A}$

3) $\lim_{n\downarrow-\infty} T^n\mathcal{B} = \nu$ (la tribu triviale)

est parfaite.

L'existence d'une sous-tribu parfaite entraîne que T est un K-système.

Réciproquement dans tout K-système on peut trouver une tribu parfaite. J. King a posé la question suivante :

Est-ce que si $\mathcal{B}$ est une partition parfaite de $(X, \mathcal{A}, m, T)$ et $\mathcal{A}_1$ est un facteur de $\mathcal{A}$ (une sous-tribu T-invariante de $\mathcal{A}$), $\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}_1$ est parfaite dans $\mathcal{A}_1$?

Nous allons montrer que la réponse à la question de J. King est négative en utilisant les processus gaussiens.

Définition 2 : Soit σ une mesure positive, finie, sans atomes, symétrique sur S_1. On considère le processus gaussien réel stationnaire X_n, $n \in \mathbb{Z}$, dont la covariance est donnée par σ (i.e. pour tout $m, n \in \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{E}(X_m X_{m+n}) = \int_{S_1} e^{in\theta} d\sigma(\theta)$).

La translation $T(X_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (X_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un système dynamique $(X,\mathcal{A},m,T_\sigma)$. Soit H le sous-espace gaussien engendré par les X_n, $n \in \mathbb{Z}$. On note $\tilde{U}_\sigma$ l'opérateur unitaire induit par la restriction à H de l'opérateur unitaire U_σ de $\mathrm{L}^2(X)$ dans $\mathrm{L}^2(X)$ défini par $U_\sigma f(x) = f\,T_\sigma(x)$. On note U l'opérateur unitaire sur $\mathrm{L}^2(S_1, \sigma)$ défini par $Uf(x) = e^{ix} f(x)$. Alors $(H, \tilde{U}_\sigma)$ est unitairement conjugué à $\big(\mathrm{L}^2(S_1, \sigma), U\big)$ par l'isomorphisme V induit par $X_n \to e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Si A est un sous-ensemble de S_1, on appelle $\tilde{H}_A \subset \mathrm{L}^2(S_1, d\sigma)$ l'espace cyclique engendré par la fonction $\mathbb{1}_A$ sous l'action de U et $H_A \subset H$ est défini par $H_A = V^{-1}(\tilde{H}_A)$. La restriction de T_σ à $\mathcal{B}(H_A) = \mathcal{B}_A$ définit un facteur de T_σ (qui est isomorphe à $T_{\mathbb{1}_A \cdot \sigma}$).

Proposition 1 : *Avec les notations de la définition précédente, on considère $(X, \mathcal{A}, m, T_\sigma)$ où σ est la mesure de Lebesgue sur S_1. T_σ provient donc du processus gaussien X_n, $n \in \mathbb{Z}$, où les X_n, $n \in \mathbb{Z}$, forment une famille indépendante. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X_n, n \leq 0)$, la tribu $\mathcal{B}$ est parfaite pour T_σ. Pour tout A de S_1 tel que $\sigma(A) > 0$ et $\sigma(A^c) > 0$, le facteur $\mathcal{B}_A$ de T_σ vérifie $\mathcal{B}_A \wedge \mathcal{B} = \nu$.*

Démonstration : Soit $H^- \subset H$ le sous-espace engendré par les X_n, $n \leq 0$. Alors $V(H^-) = \tilde{H}^-$ est le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(S_1, d\sigma)$ engendré par les $e^{in\theta}$, $n \leq 0$.

Que $\tilde{H}^- \cap H_A = 0$ est une conséquence immédiate du théorème de F. et M. Riesz qui dit qu'une fonction de $L^2(S_1, d\sigma)$ qui est non identiquement nulle et nulle sur un ensemble de mesure positive ne peut pas avoir tous ses coefficients de Fourier négatifs égaux à 0.

(Pour une démonstration voir [4], théorème 1 1, p. 4). Le lemme 1 entraîne $\mathcal{B}(H_A) \wedge \mathcal{B} \doteq \nu$.

Il serait intéressant de construire des contre-exemples à la question de J. King dans la classe des transformations d'entropie finie. (Il n'y a aucun espoir de parvenir à de tels exemples en utilisant les processus gaussiens dont l'entropie est soit nulle soit infinie voir [1]).

— II —

Nous allons maintenant utiliser les processus gaussiens pour produire facilement des exemples de discontinuité de l'entropie directionnelle pour une action de $\mathbb{Z}^2$.

Soit $(X, \mathcal{A}, m, S, T)$ une action de $\mathbb{Z}^2$ engendrée par deux automorphismes qui commutent S et T. Pour tout couple d'entiers $p \geq 0$, $q \geq 0$, on définit l'entropie dans la direction de pente p/q par $\dfrac{\mathrm{E}(S^pT^q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$. (E désigne l'entropie.)

La question de la continuité de l'entropie directionnelle a été abordée dans un cadre métrique pour la première fois dans [8].

Proposition 2 : *Il existe une action $(X, \mathcal{A}, m, S, T)$ de $\mathbb{Z}^2$ de générateurs S et T telle que $\mathrm{E}(S^pT^q) = 0$ pour tout couple p, q tel que $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p \neq q$ tandis que* $\mathrm{E}(ST) = +\infty$.

Démonstration : (**A**) Il existe une mesure positive finie μ sur le tore $\mathbb{T}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\hat{\mu}(n, n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$.

2) Pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $p \neq q$, $(p \wedge q) = 1$ la mesure μ_{pq} sur $\mathbb{T}^1$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par $\hat{\mu}_{p,q}(k) = \hat{\mu}(pk, qk)$, $k \in \mathbb{Z}$, est singulière.

La construction de μ est donnée comme un produit de Riesz : $\mu = \prod_{j \in \mathrm{N}} (1 + \cos(2\pi m_j x + 2\pi n_j y))$ et la suite (m_j, n_j), $j \geq 1$ est définie par récurrence de façon que pour tout (p, q), $p \neq q$, $(p \wedge q) = 1$ la famille (m_j, n_j), $j \geq 1$ intersecte infiniment souvent l'ensemble (np, nq), $n \in \mathbb{Z}$, que $m_j \neq n_j$, $\forall j \in \mathrm{N}$ et que $|m_j - n_j|$ soit suffisamment grand devant $\sum_{j'<j} |m_{j'}| + |n_{j'}|$ pour que la suite (m_j, n_j) soit dissociée et que $\hat{\mu}(n, n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. (La suite (m_j, n_j), $j \geq 1$, est dite dissociée si tout couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ s'écrit d'au plus une manière $(m, n) = \sum \varepsilon_j (m_j, n_j)$ où ε_j vaut 0, +1 ou −1 et $\varepsilon_j = 0$ sauf pour nombre fini d'indices).

Que $\mu_{p,q}$ où $(p, q) = 1$ soit singulière est une application d'un critère général de singularité des produits de Riesz (voir [5], théorème 4.4. p. 407).

(**B**) On considère le champ stationnaire gaussien $X_{m,n}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ dont la covariance est donnée par μ (i.e. $\mathbb{E}(X_{m+k,n+l}X_{m,n}) = \int_{\mathbf{T}^2} e^{2i\pi(kx+ly)}d\mu$). On appelle S la translation $S(X_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} = (X_{m+1,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $T(X_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} = (X_{m,n+1})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.

La mesure spectrale de S^pT^q est équivalente à μ_{pq} et par conséquent (**A**) entraîne que $\mathrm{E}(ST) = +\infty$ tandis que $\mathrm{E}(S^pT^q) = 0$ dès que $p \neq q$. (On a utilisé que l'entropie d'un processus gaussien est infinie dès que sa mesure spectrale a une composante absolument continue, et est égale à 0 sinon).

Remarquons qu'on a en particulier $\mathrm{E}(S) = 0$, $\mathrm{E}(T) = 0$ et $\mathrm{E}(ST) = +\infty$, et qu'un tel exemple, où $0 < \mathrm{E}(ST) < +\infty$, construit par des techniques de "découpages et empilements indépendants" était connu (voir [7]). On peut aussi produire, par la même technique, un exemple satisfaisant à toutes les conditions de la proposition 2 mais où l'on a $0 < \mathrm{E}(ST) < +\infty$. Cela a été fait indépendamment par Thouvenot et Weiss (non publié). Insistons sur le fait que l'intérêt de la proposition 2 réside dans la brièveté de sa démonstration.

— III —

Nous allons maintenant donner un exemple où le lemme 1 est utilisé comme un outil pour étudier la structure des facteurs de certains processus gaussiens. Rappelons qu'une mesure sur S_1 est dite de Kronecker si son support est un ensemble de Kronecker. (Un tel ensemble est défini par la propriété que toute fonction continue de module 1 sur cet ensemble est une limite uniforme de caractères). Utilisant les notations de la définition 2, la proposition qui suit décrit la structure de tous les facteurs d'un système gaussien Kronecker. (A une extension par un groupe compact près, tout facteur est encore gaussien).

Proposition 3 : *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T_\sigma)$ un processus gaussien avec σ Kronecker. Soit H l'espace gaussien associé à T_σ et U_σ la restriction de U_T à H. (on a utilisé les notations de la définition 2). Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu T_σ invariante de $\mathcal{A}$. Il existe une tribu T_σ invariante $\tilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}$, un groupe compact G tel que la restriction de T_σ à $\tilde{\mathcal{B}}$ soit isomorphe à une extension de la restriction de T_σ à $\mathcal{B}$ par le groupe G (un produit gauche avec les translations sur G) et un sous-espace gaussien $H_\mathcal{B}$ fermé dans H, invariant par U_σ tels que $\mathcal{B}(H_\mathcal{B}) = \tilde{\mathcal{B}}$.*

Démonstration : On considère $\lambda_\mathcal{B}$ le couplage relativement indépendant de T_σ avec lui-même au dessus de $\mathcal{B}$. (Si $(X_i, \mathcal{A}_i, m_i, T_{i,\sigma})$, $i = 1,2$ sont deux copies de $(X, \mathcal{A}, m, T_\sigma)$, on définit $\lambda_\mathcal{B}$ sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ par

$$\lambda_\mathcal{B}(A_1 \times A_2) = \int \mathbb{E}^\mathcal{B}\mathbb{1}_{A_1}\,\mathbb{E}^\mathcal{B}\mathbb{1}_{A_2}\,dm_\mathcal{B} \qquad A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2$$

$\lambda_\mathcal{B}$ est $T_1 \times T_2$ invariante et ses marges sont m_1 et m_2). On utilise les trois résultats suivants