Astérisque

S. ATTAL

M. ÉMERY

Martingales d'Azéma bidimensionnelles

Astérisque, tome 236 (1996), p. 9-21

http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__9_0

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Martingales d'Azéma bidimensionnelles

S. Attal, M. Émery

Résumé. — Un théorème de Meyer affirme l'existence de solutions pour une équation de structure markovienne à coefficient continu; en l'étendant à deux dimensions, nous obtenons l'existence des martingales d'Azéma bidimensionnelles. Ces processus font l'objet d'une classification simple; certains d'entre eux jouissent de la propriété de représentation chaotique.

1. Martingales d'Azéma multidimensionnelles

D'abord quelques rappels sur les martingales d'Azéma réelles et les équations de structure réelles ou vectorielles. Une martingale réelle X est dite *normale* si $X_t^2 - t$ est une martingale; ceci revient à dire que $[X, X]_t - t$ en est une, ou encore que $\langle X, X \rangle_t = t$ pour tout t (par convention, tous les crochets et toutes les intégrales stochastiques seront nuls en zéro, même si $X_0 \neq 0$). Lorsque X est une martingale normale et possède de plus la propriété de représentation prévisible, la martingale $[X, X]_t - t$ est une intégrale stochastique par rapport à X : il existe un processus prévisible Φ tel que

$$[X, X]_t = t + \int_0^t \Phi_s dX_s ;$$

cette formule est une *équation de structure*. On l'écrit souvent sous forme différentielle $d[X, X]_t = dt + \Phi_t dX_t$. Un cas particulier fort intéressant (dit markovien) est celui où Φ_t est de la forme $f(X_{t-})$. Étant donnée une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, un théorème de Meyer ([3]) affirme qu'il existe, sur un espace probabilisé adéquat, une martingale X vérifiant l'équation de structure

$$d[X, X]_t = dt + f(X_{t-}) dX_t .$$

En particulier, lorsque f est une fonction affine, cette équation devient

$$d[X, X]_t = dt + (\alpha + \beta X_{t-}) dX_t ;$$

si l'on impose une valeur initiale $X_0 = x$, elle admet une solution unique en loi, la *martingale d'Azéma* de paramètres α et β (voir [2]).

Une martingale $X = (X^i)_{1 \leq i \leq d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dite normale lorsque l'on a $\langle X, X \rangle_t = \delta^{ij} t$ pour tout t . L'équation de structure qu'une telle martingale est susceptible de vérifier prend la forme

$$d[X^i, X^j]_t = \delta^{ij} dt + \sum_k \Phi_k^{ij}(t) dX_t^k .$$

Ces équations de structure multidimensionnelles sont étudiées dans [1]; il y est montré que la famille des d^3 processus prévisibles Φ_k^{ij} n'est pas arbitraire : pour qu'il existe une solution X , il faut que, pour presque tout (t, ω) , les $\Phi_k^{ij}(t, \omega)$ soient les d^3 composantes d'un tenseur *doublement symétrique*. (Un tenseur $T = (T_k^{ij})_{1 \leq i, j, k \leq d}$ est dit doublement symétrique lorsque

$$T_k^{ij} \text{ est symétrique en } i, j \text{ et } k$$

et

$$\sum_m T_m^{ij} T_t^{mk} \text{ est symétrique en } i, j, k \text{ et } \ell;$$

les tenseurs doublement symétriques sont exactement ceux que l'on peut diagonaliser dans une base orthonormée.) Il est établi dans [1] que ces conditions de symétrie apparaissant dans les équations de structure sont maximales — ceci sera corroboré par le théorème 1 plus bas.

DÉFINITION. — Une martingale normale $X = (X^i)_{1 \leq i \leq d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une martingale d'Azéma si elle vérifie une équation de structure de la forme

$$d[X^i, X^j]_t = \delta^{ij} dt + \sum_{k=1}^d f_k^{ij}(X_{t-}) dX_t^k ,$$

où les f_k^{ij} sont d^3 fonctions affines sur $\mathbb{R}^d$ telles que, pour presque tout (t, ω) , le tenseur $f(X_{t-})$ soit doublement symétrique.

2. Le cas bidimensionnel

Nous allons nous restreindre au cas bidimensionnel ($d = 2$). Faute en effet d'être parvenus à des méthodes permettant de traiter le cas général, nous remplaçons la compréhension en profondeur des phénomènes par des calculs explicites qui deviendraient inextricables en dimensions supérieures; nos résultats ne constituent donc qu'une première approche vers les martingales d'Azéma multidimensionnelles.

À deux dimensions, un tenseur doublement symétrique est un tenseur de la forme $(T_k^{ij})_{1 \leq i, j, k \leq 2}$, où les conditions de symétrie imposent d'une part

$$T_2^{11} = T_1^{12} = T_1^{21} ; \quad T_2^{12} = T_2^{21} = T_1^{22}$$

(donc T ne dépend que des quatre quantités $p = T_1^{11}$, $q = T_2^{22}$, $r = T_2^{11}$ et $s = T_1^{22}$), et d'autre part

$$\sum_m T_m^{1j} T_l^{m2} = \sum_m T_m^{2j} T_l^{m1} ,$$

qui exprime la symétrie en i et k de la somme $\sum_m T_m^{ij} T_l^{mk}$ déjà symétrique en i et j et en k et l . Compte tenu de la symétrie de T en ses trois indices, échanger j et l revient à échanger les deux membres; cette relation est donc automatiquement vérifiée lorsque $j = l$ et il suffit de l'écrire pour $j = 1$ et $l = 2$. On obtient

$$ps + qr = r^2 + s^2 .$$

Une équation de structure bidimensionnelle se met donc sous la forme

$$\begin{cases} d[X, X]_t = dt + P_t dX_t + R_t dY_t \\ d[X, Y]_t = R_t dX_t + S_t dY_t \\ d[Y, Y]_t = dt + S_t dX_t + Q_t dY_t \end{cases}$$

où les processus prévisibles P , Q , R et S vérifient pour presque tout (t, ω) la relation $PS + QR = R^2 + S^2$. Et les martingales d'Azéma bidimensionnelles sont les martingales normales $Z = (X, Y)$ telles qu'il existe quatre fonctions affines p , q , r et s sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour presque tout (t, ω)

$$(*) \quad p(Z_{t-})s(Z_{t-}) + q(Z_{t-})r(Z_{t-}) = r(Z_{t-})^2 + s(Z_{t-})^2$$

et telles que

$$(A) \quad \begin{cases} d[X, X]_t = dt + p(Z_{t-})dX_t + r(Z_{t-})dY_t \\ d[X, Y]_t = r(Z_{t-})dX_t + s(Z_{t-})dY_t \\ d[Y, Y]_t = dt + s(Z_{t-})dX_t + q(Z_{t-})dY_t . \end{cases}$$

LEMME 1. — *Les quatre fonctions affines p , q , r et s associées à une martingale d'Azéma bidimensionnelle Z sont uniquement déterminées par Z .*

DÉMONSTRATION. — Si p' , q' , r' et s' sont aussi associées à Z , l'ensemble $E = \{p=p', q=q', r=r', s=s'\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$, dans lequel se trouvent presque tous les $Z(t-, \omega)$. Par limites à droite, pour presque tout t , $Z_t(\omega)$ est p. s. dans E ; soient $s < t$ deux instants auxquels ceci a lieu. Puisque Z est normale, la matrice de covariance $\mathbb{E}[(Z_t - Z_s) \otimes (Z_t - Z_s)]$ du vecteur aléatoire $Z_t - Z_s$ est égale à $(t-s)\text{Id}$; ce vecteur ne peut donc pas prendre ses valeurs dans une droite déterministe de $\mathbb{R}^2$, et E est l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier. ■

Cependant la relation (*) ne peut être simplifiée : nous rencontrerons plus bas certaines martingales d'Azéma pour lesquelles les quatre fonctions affines p , q , r et s ne vérifient pas la relation $ps + qr = r^2 + s^2$ sur tout $\mathbb{R}^2$, mais seulement sur un fermé dans lequel Z prend ses valeurs.

3. Existence

Comme dans le cas unidimensionnel, l'existence de martingales d'Azéma bidimensionnelles découle d'un résultat plus général : voici une extension bidimensionnelle du théorème d'existence de Meyer ([3]).

THÉOREME 1. — *Soient z un point de $\mathbb{R}^2$ et p , q , r , s quatre fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, liées par la relation $ps + qr = r^2 + s^2$. Sur un espace probabilisé filtré convenable, il existe une martingale bidimensionnelle $Z = (X, Y)$ telle que $Z_0 = z$ et vérifiant l'équation de structure*

$$\begin{cases} d[X, X]_t = dt + p(Z_{t-}) dX_t + r(Z_{t-}) dY_t \\ d[X, Y]_t = r(Z_{t-}) dX_t + s(Z_{t-}) dY_t \\ d[Y, Y]_t = dt + s(Z_{t-}) dX_t + q(Z_{t-}) dY_t . \end{cases}$$

Nous l'allons prouver en suivant le même schéma que Meyer dans [3], c'est-à-dire en discrétisant le temps dans l'équation de structure. Une difficulté nouvelle apparaît en dimension 2 : les équations de structure en temps discret et continu n'ont pas la même forme, le tenseur des coefficients en temps discret étant non pas doublement symétrique, mais *sesqui-symétrique*. Ceci signifie que, si h est un réel positif et $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale à temps discret à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont les accroissements $\Delta\zeta_n = \zeta_n - \zeta_{n-1}$ vérifient une équation de structure de la forme

$$\Delta\zeta_n^i \Delta\zeta_n^j = h \delta^{ij} + \sum_k \Phi_k^{ij}(n) \Delta\zeta_n^k ,$$

où les Φ_k^{ij} sont des processus prévisibles, alors, à tout instant n ,

$$\Phi_k^{ij} \text{ dépend symétriquement de } i, j \text{ et } k$$

et

$$\sum_m \Phi_m^{ij} \Phi_\ell^{mk} + h \delta^{ij} \delta_\ell^k \text{ dépend symétriquement de } i, j, k \text{ et } \ell .$$

Lorsque $h = 1$ ceci se trouve dans la proposition 6 de [1]; le cas général s'en déduit immédiatement par homothétie de rapport $\sqrt{h}$.

Réciproquement, on a un résultat d'existence : d'après le corollaire 3 de [1], si l'on se donne un tenseur Φ possédant les propriétés de sesqui-symétrie rappelées ci-dessus, il existe un (et, en loi, un seul) vecteur aléatoire $\Delta\zeta$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que