EMMANUEL PEYRE

# Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels

*Astérisque*, tome 251 (1998), p. 259-298

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__259_0>

*Astérisque* **251**, 1998, p. 259–298

# TERME PRINCIPAL DE LA FONCTION ZÊTA DES HAUTEURS ET TORSEURS UNIVERSELS

*par*

Emmanuel Peyre

***Résumé.*** — Soient $V$ une variété de Fano et $\mathbf{H}$ un système de hauteurs d'Arakelov définissant un accouplement entre le groupe de Picard Pic $V$ et les points rationnels de $V$ à valeur dans $\mathbf{R}$. Soit $\zeta_{\mathbf{H}}$ la fonction zêta associée sur Pic $V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin et Tschinkel ont conjecturé que cette fonction est holomorphe sur un cône de sommet le faisceau anticanonique $\omega_V^{-1}$. Il est en outre possible de donner une expression conjecturale du terme principal de cette fonction $\zeta_{\mathbf{H}}$ au voisinage de ce sommet. Le but de ce texte est de montrer comment cette expression conjecturale peut s'écrire naturellement en passant aux torseurs universels au-dessus de $V$.

## 1. Introduction

Soit $V$ une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres $k$ telle que $H^i(V, \mathcal{O}_V)$ soit nul pour $i = 1$ ou 2 et telle que la classe du faisceau anticanonique $\omega_V^{-1}$ soit à l'intérieur du cône effectif. On suppose en outre que les points rationnels de $V$ sont Zariski denses. Soit $\mathbf{h}$ une hauteur sur $V$ correspondant à la donnée d'une paire $(L, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ où $L$ est un fibré en droites dont la classe est dans le cône effectif et $(\|.\|_v)_{v \in M_k}$ un système adélique de métriques sur $L$. On s'intéresse alors au comportement asymptotique de

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in U(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}$$

où $U$ est un ouvert dense de $V$.

À la connaissance de l'auteur, dans les exemples considérés à ce jour ce comportement est de la forme

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) \sim CH^a (\log H)^{b-1}$$

où $C$ est une constante réelle strictement positive, $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$. Diverses conjectures à des degrés de précision divers ont été faites sur $a$ et $b$ par Batyrev et Manin

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — Primaire 14G05; secondaires 14L30, 11D72.
***Mots clefs.*** — Torseurs universels, mesure de Tamagawa.

(cf. **[FMT]**, **[BM]** et **[Man]**) puis, lorsque $L$ est le faisceau anticanonique, sur $C$ (cf. **[Pe]**). Les principales familles de variétés pour lesquelles des résultats ont été effectivement démontrés peuvent être regroupées en deux groupes : d'une part les intersections complètes lisses de grande dimension sur $\mathbf{Q}$, pour lesquelles on dispose de la méthode du cercle (cf. **[Bi]**, **[FMT]**) et d'autre part les variétés sur lesquelles agissent des groupes algébriques avec une orbite ouverte pour lesquelles on utilise des techniques d'analyse harmonique fine (cf. **[FMT]**, **[BT1]** et **[BT2]**). Peu de cas ont été traités en dehors de ces deux grands groupes, faute d'avoir une autre méthode générale. Toutefois Salberger a montré une majoration de la forme souhaitée pour la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, surface qui ne rentre dans aucun des deux groupes indiqués. La méthode qu'il utilise souligne le rôle du torseur universel pour attaquer le problème en général.

Ces torseurs universels, introduits par Colliot-Thélène et Sansuc en liaison avec les problèmes du principe de Hasse et de l'approximation faible (cf. **[CTS1]** et **[CTS2]**) apparaissent implicitement dans le cas des intersections complètes lisses en tant que cône au-dessus de la variété ainsi que dans des démonstrations directes de la formule asymptotique dans quelques cas particuliers de variétés toriques (cf. **[Pe]** et **[Ro]**). Tout récemment, Salberger a démontré dans **[Sa]** comment la constante

$$\#H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V}) C_{\mathbf{h}}(V)$$

où $C_{\mathbf{h}}(V)$ a été défini dans **[Pe]**, constante qui apparaît dans la plupart des cas considérés à ce jour, pouvait s'interpréter comme somme de nombres de Tamagawa associés aux torseurs universels ayant un point rationnel.

Le but de ce texte est similaire : il s'agit de montrer comment la conjecture actuellement la plus précise sur le terme principal de la fonction zêta des hauteurs

$$\zeta_{\mathbf{H}} : \operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

peut s'exprimer de manière naturelle comme passage d'une sommation sur les points rationnels à une intégrale sur un domaine de type adélique muni d'une mesure canonique.

Les outils développés permettent également d'interpréter la conjecture de Manin raffinée sur $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ pour une hauteur $\mathbf{h}$ associée a $\omega_V^{-1}$ en termes des torseurs universels.

Dans la partie 2, nous introduisons les notations qui nous sont nécessaires puis rappelons la formule empirique obtenue pour le terme principal de la fonction zêta des hauteurs. La partie 3 est consacrée à des rappels sur les torseurs universels. La partie 4 décrit le relèvement de divers objets à ces torseurs. Enfin la partie 5 contient les deux résultats principaux et leurs démonstrations.

## 2. Le terme principal de la fonction zêta des hauteurs

**2.1. Notations. —** Nous allons tout d'abord fixer un certain nombre de notations qui seront utilisées dans l'ensemble du texte.

***Notations 2.1.1.*** — Pour tout corps $E$, on note $\overline{E}$ une clôture algébrique de $E$ et $E^s$ la clôture séparable de $E$ dans $\overline{E}$. Pour tout $\mathrm{Gal}(E^s/E)$-module discret $M$, on désigne par $H^i(E,M)$ le groupe de cohomologie $H^i(\mathrm{Gal}(E^s/E),M)$.

Dans la suite $k$ désigne un corps de nombres, $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers et $d$ son discriminant. L'ensemble des places de $k$ est noté $M_k$, l'ensemble des places finies $M_f$ et l'ensemble des places archimédiennes $M_\infty$. Pour tout $v \in M_k$, on note $k_v$ le complété de $k$ en $v$, $|.|_v$ la norme associée normalisée par

$$\forall v|p, \quad \forall x \in k_v, \quad |x|_v = \left|N_{k_v/\mathbf{Q}_p}(x)\right|_p.$$

Si $v$ appartient à $M_f$, $\mathcal{O}_v$ désigne l'anneau des entiers de $k_v$ et $\mathbf{F}_v$ le corps résiduel. Pour tout $v$ de $M_\infty$ tel que $[k_v : \mathbf{R}] = 2$, on fixe un isomorphisme de $k_v$ sur $\mathbf{C}$. Pour toute place $v$, la mesure de Haar $dx_v$ sur $k_v$ est normalisée comme dans [**We**, § 2.1.1] ; autrement dit,

- si $v \in M_f$, alors $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$,
- si $k_v = \mathbf{R}$, alors $dx_v$ est la mesure de Lebesgue usuelle,
- si $k_v = \mathbf{C}$, alors $dx_v = i\,dz\,d\bar{z} = 2\,dx\,dy$.

Soit $\mathcal{V}$ un schéma sur un anneau $A$. Alors pour toute $A$-algèbre $B$, $\mathcal{V}(B)$ désigne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,B,\mathcal{V})$ et $\mathcal{V}_B$ le produit $\mathcal{V} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,B$. Si $V$ est défini sur $k$ et $v \in M_k$, on note $V_v$ le schéma $V_{k_v}$.

Si $V$ est une variété lisse sur un corps $E$, son groupe de Picard est noté $\mathrm{Pic}\,V$, son groupe de Neron-Severi $\mathrm{NS}(V)$ et son faisceau canonique $\omega_V$. On note également $C_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône dans $\mathrm{NS}(V) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs. Si $V$ est une variété sur $k$, $V(\boldsymbol{A}_k)$ désigne l'espace adélique associé (cf. [**We**, § 1]).

Si $A$ est une partie de $B$, on note $\mathbf{1}_A$ sa fonction indicatrice.

***Hypothèses 1.*** — Dans la suite $V$ désigne une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $k$ qui satisfait les conditions suivantes :

(i) $H^i(V,\mathcal{O}_V) = 0$ pour $i = 1$ ou 2,
(ii) $\mathrm{Pic}\,\overline{V} = \mathrm{NS}\,\overline{V}$ est sans torsion,
(iii) $\omega_V^{-1}$ appartient à l'intérieur du cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$ et
(iv) $V(k)$ est Zariski dense dans $V$.

Ces hypothèses suffisent pour définir les objets décrits dans [**Pe**]. Toutefois nous serons amenés par la suite à supposer que la variété vérifie d'autres conditions plus techniques.

**2.2. Hauteurs.** — Dans la suite nous utiliserons les hauteurs d'Arakelov qui sont définies de la manière suivante :

***Définitions 2.2.1.*** — Soit $X$ une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur $k$, $L$ un faisceau inversible sur $X$. Pour toute place $v$ de $k$, une *métrique $v$-adique* sur $L$ est une application qui à tout point $x$ de $X(k_v)$ associe une norme $\|.\|_v$ sur $L(x) = L_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k_v$ de sorte que pour tout ouvert $W$ de $X$ et toute section $\mathsf{s}$ de $L$ sur $W$ l'application

$$x \mapsto \|\mathsf{s}(x)\|_v$$

soit continue.

Une *métrique adélique* sur $L$ est une famille de métriques $(\|.\|_v)_{v \in M_k}$ de sorte qu'il existe un ensemble fini $S \subset M_f$, un modèle projectif et lisse $\mathscr{X}$ de $X$ sur $\mathcal{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de $L$ sur $\mathscr{X}$ de sorte que pour tout $v \in M_f - S$, pour tout $x \in X(k_v)$, correspondant à $\tilde{x} \in \mathscr{X}(\mathcal{O}_v)$, la norme $\|.\|_v$ sur $L(x)$ soit définie à l'aide d'un générateur $y_0$ du $\mathcal{O}_v$-module de rang un $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ par la formule

$$\forall y \in L(x), \quad \|y\|_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v .$$

Une *hauteur d'Arakelov* $\mathbf{h}$ sur $X$ est la donnée d'une paire $(L, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ où $L$ est un fibré en droites et $(\|.\|_v)_{v \in M_k}$ une métrique adélique sur le fibré en droites $L$. Si $\mathbf{h}$ est une hauteur sur $X$ et si $x$ est un point rationnel de $X$, alors la *hauteur de $x$ relativement à* $\mathbf{h}$ est définie par

$$\mathbf{h}(x) = \prod_{v \in M_k} \|\mathsf{s}(x)\|_v^{-1}$$

où $\mathsf{s}$ est une section de $L$ sur un voisinage de $x$ avec $\mathsf{s}(x) \neq 0$. Par la formule du produit cela est indépendant du choix de la section.

Pour tout sous-espace constructible $W$ de $V$ et tout $H > 0$ on pose

$$n_{W,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in W(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\} \leqslant +\infty.$$

***Remarques 2.2.1.*** — (i) Si $[L]$ appartient à l'intérieur du cône effectif, alors il existe un ouvert non vide $U$ de $X$ tel que $n_{U,\mathbf{h}}(H)$ soit fini pour tout $H$.

(ii) On a une notion évidente de produit tensoriel de hauteurs et

$$\forall x \in X(k), \quad \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_2(x) = \mathbf{h}_1(x)\mathbf{h}_2(x).$$

**2.3. Mesures de Tamagawa.** — Nous allons maintenant rappeler comment toute métrique adélique sur $\omega_V^{-1}$ définit une mesure sur $V(\boldsymbol{A}_k)$.

***Notations 2.3.1.*** — Soit $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (\|.\|_v)_{v \in M_k})$ une hauteur sur $V$. Pour toute place $v$ de $k$, on lui associe la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ sur $V(k_v)$ définie par la relation (cf.