Astérisque

ETIENNE FOUVRY

Sur la hauteur des points d'une certaine surface cubique singulière

Astérisque, tome 251 (1998), p. 31-49

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__31_0>

Astérisque **251**, 1998, p. 31–49

SUR LA HAUTEUR DES POINTS D'UNE CERTAINE SURFACE CUBIQUE SINGULIÈRE

par

Etienne Fouvry

Résumé. — Par une paramétrisation des solutions de l'équation

$$x_1x_2x_3 = t^3, \qquad (x_1, x_2, x_3, t) = 1$$

et par des méthodes élémentaires de théorie analytique des nombres, on montre que le nombre de points de coordonnées non nulles, de hauteur canonique inférieure à X, de la surface cubique projective de $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ d'équation

$$X_1X_2X_3 = T^3,$$

est, pour $X \longrightarrow \infty$, équivalent à $c_0 X \log^6 X$, où c_0 est une certaine constante > 0.

1. Introduction

Cet article a été motivé par le récent travail de Batyrev et Tschinkel ([B–T1], [B–T2], [B–T3]), concernant le nombre de points de hauteur inférieure à une certaine borne X tendant vers l'infini, sur des variétés toriques projectives lisses sur un corps de nombres quelconque, par rapport à des plongements projectifs arbitraires.

Nous traitons ici, le cas très particulier de la variété $\mathcal{V}$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$, d'équation

$$X_1X_2X_3 = T^3.$$

Soit $V(X)$ le cardinal de l'ensemble des points de $\mathcal{V}$ de coordonnées non nulles et de hauteur au plus égale à X.

L'étude de $V(X)$ est un cas particulier de ([B–T2] Theorem 1.4) mais aussi de ([B–T1] Corollary 7.4). Toutefois, il faut remarquer que, dans ces deux articles, il est question de variétés toriques lisses. Le traitement de la cubique singulière $\mathcal{V}$, se fait par une résolution de singularités qui fournit ainsi une variété torique lisse. On utilise la fonctorialité des hauteurs pour se ramener au résultat de [B–T2]. Cette délicate réduction est développée, dans un cadre plus général, dans [B–T3].

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — Primaire 11D72; secondaire 14M25.
Mots clefs. — Surface cubique, hauteur.

L'objet de cet article est de montrer que des méthodes classiques de théorie analytique des nombres conduisent elles–aussi à un équivalent asymptotique de $V(X)$ pour $X \longrightarrow \infty$. Nous montrerons le

Théorème 1.1. — *Pour $X \longrightarrow \infty$, on a la relation*

$$V(X) = (c_0 + o(1))X \log^6 X, \tag{1}$$

où c_0 est une constante absolue, strictement positive.

Remarquons, dans un premier temps, que $V(X)$ est aussi le cardinal des quadruplets d'entiers relatifs (x, y, z, t) vérifiant

$$(x, y, z, t) = 1; \qquad 1 \leqslant x,\ |y|,\ |z|,\ |t| \leqslant X \qquad \text{et} \qquad xyz = t^3.$$

En jouant sur les signes, on voit qu'on a l'égalité

$$V(X) = 4V^+(X),$$

avec

$$V^+(X) = \sharp\{(x, y, z, t) \mid 1 \leqslant x,\ y,\ z,\ t \leqslant X,\ (x, y, z, t) = 1,\ xyz = t^3\}.$$

Il est intéressant de noter que des altérations, apparemment anodines, de la définition de $V^+(X)$, perturbent radicalement son ordre de grandeur asymptotique : on a d'une part

$$V_1^+(X) := \sharp \left\{ (x, y, z, t) \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} (x, y) = (y, z) = (z, x) = 1, \\ 1 \leqslant x,\ y,\ z,\ t \leqslant X \\ xyz = t^3 \end{array} \right. \right\} \sim c_1 X$$

(avec c_1 constante strictement positive, en effet les restrictions précédentes donnent pour paramétrisations des solutions à $xyz = t^3$, les quadruplets de la forme (u^3, v^3, w^3, uvw) avec $(u, v) = (v, w) = (w, u) = 1$ et $1 \leqslant u,\ v,\ w \leqslant X^{\frac{1}{3}}$) et d'autre part

$$\begin{aligned} V_2^+(X) &:= \sharp\{(x, y, z, t) \mid 1 \leqslant t \leqslant X;\ (x, y, z, t) = 1 \text{ et } xyz = t^3\} \\ &\sim c_2 X \log^8 X \end{aligned}$$

(pour ce faire, on passe par la fonction arithmétique α, qui sera définie au paragraphe 2.1, par le Lemme 2.1 et par un modeste théorème taubérien pour écrire

$$V_2^+(X) = \sum_{t \leqslant X} \alpha(t) \sim c_2 X \log^8 X,$$

où c_2 est la valeur en 1 de la série de Dirichlet $(\sum_n \alpha(n) n^{-s})\zeta^{-9}(s)$.)

Ces variations ont le mérite de convaincre de l'importance intrinsèque des conditions de la définition de $V^+(X)$.

Pour revenir à la formule (1), la constante c_0 peut être décrite explicitement, de même que le $o(1)$ peut être précisé, tout au moins en théorie. En effet, les méthodes qui suivent sont absolument classiques, n'apportent rien de vraiment nouveau en théorie analytique des nombres, mais sont extrêmement lourdes par le nombre très élevé de variables de sommation engendrées par les différentes transformations. Ce qui suit peut, en principe, être transposé à l'équation

$$X_1X_2X_3X_4 = T^4,$$

mais la démarche devient totalement asphyxiante par le nombres de variables de sommation qu'il faut gérer.

Cet article a été écrit à la cordiale invite de V. Batyrev, J–L. Colliot–Thélène, E. Peyre et Y. Tschinkel et a bénéficié de conversations avec J. Brüdern et H. Iwaniec. Que ces différentes personnes soient ici remerciées !

2. Transformations de $V^+(X)$.

L'idée de base des fastidieuses transformations qui vont suivre, est de se ramener à une équation de la forme $xyz = t^3$ mais avec les conditions plus fortes de coprimalité $(x, y) = (y, z) = (z, x) = 1$. On a alors une représentation paramétrique des solutions en $(x, y, z, t) = (u^3, v^3, w^3, uvw)$ avec $(u, v) = (v, w) = (w, u) = 1$, ce qui est beaucoup plus facile à compter (voir $V_1^+(X)$ ci–dessus).

Puisque les conditions $1 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant X$ entraînent $t \leqslant X$ et que $(x, y, z) = 1$ implique $(x, y, z, t) = 1$, le cardinal étudié s'écrit aussi, après un changement de notations, sous la forme

$$V^+(X) = \sharp\left\{ (x_1, x_2, x_3, t) \,\middle|\, \begin{cases} 1 \leqslant x_1,\ x_2,\ x_3 \leqslant X, \\ (x_1, x_2, x_3) = 1, \\ x_1x_2x_3 = t^3 \end{cases} \right\}.$$

Soit $d_1 = (x_2, x_3)$, alors on a l'égalité

$$V^+(X) = \sharp\left\{ (d_1, x_1, x_2', x_3', t) \,\middle|\, \begin{cases} 1 \leqslant d_1,\ x_1 \leqslant X, \\ 1 \leqslant d_1x_2',\ d_1x_3' \leqslant X, \\ (x_2', x_3') = (d_1, x_1) = 1, \\ d_1^2x_1x_2'x_3' = t^3 \end{cases} \right\},$$

puis posant $d_2 = (x_1, x_3')$, on a

$$V^+(X) = \sharp\left\{ (d_1, d_2, x_1', x_2', x_3'', t) \,\middle|\, \begin{cases} 1 \leqslant d_1,\ d_2 \leqslant X, \\ 1 \leqslant d_2x_1',\ d_1x_2',\ d_1d_2x_3'' \leqslant X, \\ (x_1'x_2', x_3'') = 1, \\ (d_1, d_2) = (d_1, x_1') = (d_2, x_2') = 1, \\ d_1^2d_2^2x_1'x_2'x_3'' = t^3 \end{cases} \right\},$$

enfin, en posant $d_3 = (x'_1, x'_2)$, on parvient, après un changement évident de notations, à

(2)
$$V^+(X) = \sharp \left\{ (d_1, d_2, d_3, x_1, x_2, x_3, t) \;\middle|\; \begin{cases} 1 \leqslant d_2d_3x_1, d_1d_3x_2, d_1d_2x_3 \leqslant X, \\ (x_2, x_3) = (x_3, x_1) = (x_1, x_2) = 1, \\ (d_1, d_2) = (d_1, d_3) = (d_2, d_3) = 1, \\ (d_1, x_1) = (d_2, x_2) = (d_3, x_3) = 1, \\ d_1^2d_2^2d_3^2x_1x_2x_3 = t^3 \end{cases} \right\}.$$

2.1. Hypothèses sur les d_i. — L'objet de ce qui suit est de prouver qu'on peut, pour ainsi dire, se ramener au cas où d_1, d_2 et d_3 sont sans facteur carré.

Notons $\alpha(t)$ le nombre de solutions à l'équation
$$t^3 = xyz, \qquad (x, y, z) = 1;$$
sans aucune contrainte de taille sur x, y et z. Nous aurons besoin du

Lemme 2.1. — *On a les propriétés suivantes :*
- *La fonction α est multiplicative.*
- *Pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout p premier, on a $\alpha(p^a) = 9a$.*
- *Pour tout m et n on a l'inégalité $\alpha(mn) \leqslant \alpha(m)\alpha(n)$.*

Démonstration. — Seule la deuxième assertion mérite un peu de soin. On voit que $\alpha(p^a)$ est aussi le nombre de solutions à l'équation $3a = a_1 + a_2 + a_3$ avec les a_i entiers positifs ou nuls, vérifiant aussi $a_1a_2a_3 = 0$. Un dénombrement direct donne le résultat. □

Pour $d \geqslant 1$, on dissocie d en $d = d^\diamond d^\dagger$, où $d^\diamond$ est le plus grand entier *squarefull* divisant d (rappelons qu'un entier n est *squarefull*, s'il vérifie l'implication $p|n \Rightarrow p^2|n$). Ainsi $d^\dagger$ est sans facteur carré, premier avec $d^\diamond$ et, par exemple, on a $(600)^\diamond = 200$ et $(600)^\dagger = 3$. On pose
$$\mathcal{L} = \log X, \qquad L = \mathcal{L}^7.$$

Nous allons montrer que la contribution (notée $A(L)$) à (2), des 7–uplets tels que $d_1^\diamond \geqslant L$ est négligeable. En effet, cette contribution vérifie

(3)
$$A(L) \leqslant \sum_{\ell \textit{ squarefull } \geqslant L} \; \sum_{\substack{t \leqslant X \\ \Xi(\ell)|t}} \alpha(t);$$

où Ξ est la fonction multiplicative définie sur les puissances de nombres premiers par $\Xi(p) = p$, $\Xi(p^2) = p^2$, $\Xi(p^3) = p^2$,... et plus généralement $\Xi(p^a) = p^b$ où b est le plus petit entier tel que $3b \geqslant 2a$. En effet, si $p^a|d_1$, l'égalité $d_1^2d_2^2d_3^2x_1x_2x_3 = t^3$ entraîne $p^{2a}|t^3$, donc la valuation p–adique de t^3 est supérieure ou égale au plus petit multiple de 3 qui dépasse $2a$.