HERVÉ BILLARD

# Répartition des points rationnels des surfaces géométriquement réglées rationnelles

*Astérisque*, tome 251 (1998), p. 79-89

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__79_0>

*Astérisque* **251**, 1998, p. 79–89

# RÉPARTITION DES POINTS RATIONNELS DES SURFACES GÉOMÉTRIQUEMENT RÉGLÉES RATIONNELLES

*par*

Hervé Billard

***Résumé.*** — Nous étudions la répartition des points rationnels des modèles minimaux des surfaces rationnelles et vérifions que ces surfaces satisfont les conjectures de Batyrev-Manin sur le corps des rationnels. Pour ce faire, nous rappelons d'abord quelques propriétés et descriptions géométriques de telles surfaces. Ensuite, pour chaque plongement considéré, une hauteur naturelle apparaissant, nous établissons directement le comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée. Finalement, nous regardons les sous-variétés accumulatrices.

## 1. Introduction

Lorsque $V$ est une variété algébrique définie sur un corps de nombres $k$, il est naturel de s'intéresser à la répartition des points $k$-rationnels de $V$. Pour étudier $V(k)$, on définit d'abord une hauteur $H$ qui permet de « mesurer la taille » d'un point $k$-rationnel de $V$ (cf. [La 83] chap. 3 et 4 ou chap. 6 de [Co-Si 86]) ; ensuite on s'intéresse au comportement asymptotique de $\operatorname{card}\{P \in U(k) \mid H(P) \leqslant B\}$ pour tout ouvert Zariski dense $U$ de $V$. Ce comportement asymptotique illustre parfaitement la répartition des points $k$-rationnels de $V$ (voir [Ba-Ma 90]). Pour essayer de le déterminer, il existe actuellement, à notre connaissance, quatre méthodes. La première est la méthode du cercle pour certaines intersections complètes (voir par exemple [Bir 62]) ; la deuxième consiste à définir « correctement » la hauteur $H$ et de considérer la fonction zêta associée, $\sum_{P \in U(k)} H(P)^{-s}$ (cf. [Fr-Ma-Ts 89], [Ba-Ma 90], [Pe 95], [Ba-Ts 95], entre autres) ; la troisième est de construire des hauteurs canoniques à la Néron-Tate (cf. [Ne 65], [Si 91], [Bi 97]) ; la quatrième consiste « à expliciter » un plongement de la variété $V$, à considérer une hauteur associée et à déterminer « directement » le comportement asymptotique de $\operatorname{card}\{P \in U(k) \mid H(P) \leqslant B\}$ (cf. [Ba-Ma 90], [Th 93], [Pe 95], par exemple). C'est cette dernière méthode que nous emploierons par la suite.

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 11G35, 14G05, 14G25, 14J26.
***Mots clefs.*** — Points rationnels, hauteur, surface de Hirzebruch.

D'autre part, lorsqu'on s'intéresse à la répartition des points rationnels d'une classe de variétés, on est tenté de regarder cette répartition sur les modèles minimaux. Nous proposons dans ce travail d'étudier cette question sur les modèles minimaux des surfaces rationnelles, et donc sur les surfaces géométriquement réglées $F_m$ (voir §2), qui sont également connues comme les surfaces de Hirzebruch. Signalons que les surfaces $F_m$ sont des variétés toriques. Les résultats que nous présentons affinent, par une tout autre méthode, un théorème plus général sur les variétés toriques dû à Batyrev et Tschinkel [Ba-Ts 96] restreint à notre cas.

Dans un premier temps, nous rappellerons la définition de telles surfaces, ainsi que quelques-unes de leurs propriétés géométriques. Au deuxième paragraphe, nous déterminons le comportement asymptotique de

$$\operatorname{card}\{P \in U(\mathbb{Q}) \mid H_D(P) \leqslant B\}$$

pour une famille de diviseurs amples, et verrons, que s'ils sont uniformément répartis pour les plongements considérés, ils ne le sont pas pour d'autres.

Nous tenons à remercier Marc Hindry avec qui nous avons eu de nombreuses et fructueuses discussions lors de l'élaboration de ce travail, ainsi qu'Emmanuel Peyre, Philippe Satgé et le rapporteur de ce travail.

## 2. Géométrie des surfaces de Hirzebruch

Dans ce paragraphe, nous travaillons sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Rappelons tout d'abord la définition d'une surface réglée et d'une surface géométriquement réglée.

***Définition 2.1***

**(a)** Une surface $S$ est réglée si elle est birationnellement isomorphe à $C \times \mathbb{P}^1$, où $C$ est une courbe lisse. Si $C$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, $S$ est dite rationnelle.

**(b)** Une surface est géométriquement réglée de base $C$, où $C$ est une courbe lisse, s'il existe un morphisme lisse $p : S \to C$ dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$ .

Un Théorème de Noether-Enriques nous assure qu'une surface géométriquement réglée est réglée, ce qui n'est pas évident *a priori* ([Be 78], chap. 3). D'autre part les modèles minimaux de $C \times \mathbb{P}^1$, où $C$ est une courbe lisse non rationnelle, sont les surfaces géométriquement réglées de base $C$. Intéressons-nous maintenant aux surfaces géométriquement réglées rationnelles (voir [Be 78] chap. 3 et 4, ou [Ha 77] chap. V, §2).

***Proposition 2.2***. — *Les seules surfaces géométriquement réglées rationnelles sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont les surfaces $F_m$ définies par :*

$$F_m = \mathbb{P}(O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1}(m)) \qquad (m \geqslant 0).$$

*Les surfaces $F_m$ sont minimales sauf pour $m = 1$ et $F_m$ n'est pas isomorphe à $F_\ell$ si $m \neq \ell$.*

Rappelons que $F_0$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $F_1$ est isomorphe à $\mathbb{P}^2$ éclaté en un point et les surfaces rationnelles minimales sont les surfaces $F_m$, sauf pour $m = 1$, et $\mathbb{P}^2$.

Notons $h$ (respectivement $f$) la classe dans $\mathrm{Pic}(F_m)$ du fibré $O_{F_m}(1)$ (respectivement d'une fibre).

***Proposition 2.3.*** — *Soit une surface $F_m$.*

**a)** *On a $\mathrm{Pic}(F_m) = \mathbb{Z}h + \mathbb{Z}f$ avec :*

$$f^2 = 0, \qquad h^2 = m, \qquad f \cdot h = 1.$$

**b)** *Si $m \geqslant 1$ il existe une unique courbe irréductible $C_m$ sur $F_m$ de carré négatif. La courbe $C_m$ est rationnelle et si l'on note $c$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(F_m)$, on a :*

$$c = h - mf, \qquad c^2 = -m.$$

**c)** *Notons $\omega_m$ la classe du diviseur canonique dans $\mathrm{Pic}(F_m)$, alors :*

$$\omega_m = -2h + (m-2)f.$$

**d)** *Soit $D = ah + bf$. Alors :*

$$D \text{ est très ample} \iff D \text{ est ample} \iff a > 0, \quad b > 0.$$

**e)** *Notons $\overline{NE}(F_m)$ le cône fermé dans $\mathrm{Pic}(F_m) \otimes \mathbb{R}$ engendré par les classes des courbes irréductibles de $F_m$, alors :*

$$\overline{NE}(F_m) = \{D \in \mathrm{Pic}(F_m) \otimes \mathbb{R} \mid D = ah + bf \text{ avec } a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant -ma\}.$$

*Soient $m \geqslant 1$, $C$ une courbe irréductible sur $F_m$ et $\alpha h + \beta f$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(F_m)$. Alors :*

$$C \neq C_m \Rightarrow \alpha \geqslant 0 \text{ et } \beta \geqslant 0,$$

*en particulier $\alpha m + \beta \geqslant 1$.*

**f)** *Soient $D = ah + bf$ une classe de diviseurs amples et*

$$\alpha(D) = \min\{t \in \mathbb{R} \mid tD + \omega_m \in \overline{NE}(F_m)\}.$$

*Alors, pour $m \geqslant 2$ :*

$$\alpha(D) = \frac{2}{a}.$$

La démonstration des assertions a), b), c), d), et e) peut être consultée dans [Ha 77] chap. V, §2, ou [Be 78] chap. 3 et 4. L'assertion f), est une conséquence immédiate de e). Notons que $-\omega_m$, pour $m \geqslant 2$, appartient à l'intérieur de $\overline{NE}(F_m)$, mais qu'il n'est pas ample.

Géométriquement, les surfaces $F_m$ peuvent être interprétées comme des transformations élémentaires de $\mathbb{P}^2$ (c'est-à-dire comme une succession d'éclatements et de contractions, [Be 78] chap. 3 exo 1, ou [Ha 69]), ou encore comme une réunion de courbes rationnelles. Notons que c'est surtout du point de vue de la répartition asymptotique que $F_m$ doit être vue comme la réunion de courbes rationnelles, d'un point de vue géométrique le fait que $F_m$ soit réglée est plus intéressant et donné par hypothèse.

***Proposition 2.4.*** — *Soient $m \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$ deux entiers, et posons $d = m + 2b$. Soient $R_b$ et $R_{d-b}$ les deux courbes rationnelles de $\mathbb{P}^{d+1}$ définies par :*

$$R_b = \{(U_1^b, U_1^{b-1}V_1, \ldots, U_1V_1^{b-1}, V_1^b, 0, \ldots, 0) \mid (U_1, V_1) \in \mathbb{P}^1\}$$

$$R_{d-b} = \{(0, \ldots, 0, U_2^{d-b}, U_2^{d-b-1}V_2, \ldots, U_2V_2^{d-b-1}, V_2^{d-b}) \mid (U_2, V_2) \in \mathbb{P}^1\},$$

*et $\psi$ un isomorphisme de $R_b$ sur $R_{d-b}$. Soit alors $F_{m,b}$ définie par :*

$$F_{m,b} = \left\{ (SU_1^b, SU_1^{b-1}V_1, \ldots, SV_1^b, TU_2^{d-b}, TU_2^{d-b-1}V_2, \ldots, TV_2^{d-b}) \,\middle|\, \begin{array}{l} (S,T) \in \mathbb{P}^1,\ (U_1, V_1) \in \mathbb{P}^1,\ (U_2, V_2) \in \mathbb{P}^1 \\ \psi(U_1^b, \ldots, V_1^b, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, U_2^{d-b}, \ldots, V_2^{d-b}) \end{array} \right\}.$$

*Alors la surface $F_{m,b}$ est isomorphe à la surface $F_m$ plongée par le système $|h + bf|$ dans $\mathbb{P}^{d+1}$ ; notons $\varphi_b$ le plongement associé tel que $\varphi_b(F_m) = F_{m,b}$.*

*Donner l'image d'une fibre de la surface $F_m$ (resp. de $C_m$) par $\varphi_b$ revient à fixer $U_1$ et $V_1$ (resp. à fixer $T = 0$) ; notons $F_{(U_1,V_1)}$ son image.*

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [Gr-Ha 78] p. 523-524, ou [Be 78] chap. 4, exo 2, ou [Ha 77] chap. V, Corollaire 2.19. Terminons par une remarque.

***Remarque 2.5.*** — Toute surface lisse de degré $d$ dans $\mathbb{P}^{d+1}$ qui n'est pas contenue dans un hyperplan est une surface $F_m$, ou la surface de Veronese dans $\mathbb{P}^5$, ou $\mathbb{P}^2$.

## 3. Répartition des points rationnels des surfaces de Hirzebruch

Rappelons tout d'abord quelques propriétés vérifiées par la fonction de Möbius $\mu$ et l'indicatrice d'Euler $\varphi$ (voir par exemple [Ap 76] chap. 2) qui nous seront très utiles lors du décompte des points $\mathbb{Q}$-rationnels de hauteur bornée des surfaces $F_m$. Quelque soit le réel $x$ notons $[x]$ sa partie entière.