Astérisque

JEAN-FRANÇOIS MATTEI

Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux

Astérisque, tome 261 (2000), p. 253-276

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__261__253_0>

Astérisque
261, 2000, p. 253–276

QUASI-HOMOGÉNÉITÉ ET ÉQUIRÉDUCTIBILITÉ DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES EN DIMENSION DEUX

par

Jean-François Mattei

Résumé. — Après avoir étudié la dépendance analytique des séparatrices d'une famille « équisingulière » de germes de feuilletages holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$, nous définissons la quasihomogénéité comme une propriété de rigidité. Nous obtenons un théorème de type K. Saito pour les germes de feuilletages quasi-homogènes et un théorème de type Briançon-Skoda dans le cas général.

Vocabulaire et notations

On désignera par $\mathcal{O}_M$ et par Λ^1_M respectivement les faisceaux des germes de fonctions holomorphes et de 1-formes différentielles holomorphes sur une variété holomorphe M. Pour $m \in Z \subset M$ le germe de Z en m sera noté Z, m.

Le *lieu singulier* $\mathrm{Sing}(\eta)$ d'une 1-forme $\eta \in \Lambda^1_M(M)$ est l'ensemble des points m de M où $\eta(m) \in T^*_m M$ est nulle. Lorsque $\mathrm{Sing}(\eta), m$ est de codimension 1 on peut décomposer le germe η_m de η en ce point,

$$\eta_m = h\eta'_m \qquad h \in \mathcal{O}_{M,m}, \quad \eta' \in \Lambda^1_{M,m},$$

de manière que $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Sing}(\eta'_m)) \geq 2$. Cette décomposition est unique, à unité multiplicative près et η'_m s'appellera le *saturé local de η au point m.* On notera

$$\Sigma(\eta) := \{m \in M \mid \eta'_m(m) = 0\}$$

que l'on appellera *lieu singulier strict de η.*

Lorsque la forme η vérifie la *condition d'intégrabilité* $\eta \wedge d\eta \equiv 0$, elle définit un feuilletage $\mathcal{F}_\eta$, éventuellement singulier, de *lieu singulier* $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_\eta) := \mathrm{Sing}(\eta)$. La collection des saturés locaux de η définit le *feuilletage saturé $\mathcal{F}^{\mathrm{sat}}_\eta$ associé à $\mathcal{F}_\eta$* ; son *lieu singulier* $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}^{\mathrm{sat}}_\eta)$ est égal à $\Sigma(\eta)$.

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 32A10, 32A20, 32B10,34C20, 34C35, 58F23, 32G34, 32S15, 32S30, 32S45, 32S65.
Mots clefs. — Singularités, champs de vecteurs, feuilletage, equisingularité, courbes, quasi-homogénéité, déformation, modules, formes normales.

Un sous-ensemble analytique Z de M est dit *ensemble invariant* (resp. *strictement invariant*) de η si la restricion de η (resp. des saturés locaux de η) à la partie régulière de Z est identiquement nulle. Lorsque η est intégrable, un *ensemble invariant de* $\mathcal{F}_\eta^{\text{sat}}$ est un ensemble strictement invariant de η.

Si au voisinage d'un point m d'une sous-variété lisse V de M le saturé local η'_m de η vérifie l'une des conditions suivantes :

(1) $m \in \Sigma(\eta)$,

(2) $m \notin \Sigma(\eta)$, $\eta'_m \mid_V \not\equiv 0$ et $\eta'_m \mid_V (m) = 0$,

on dira que m est un *point singulier strict du couple* $(\eta; V)$. Pour une hypersurface H à croisements normaux $\Sigma(\eta; H)$ désignera l'ensemble des points $m \in H$ qui sont points singuliers stricts d'au moins un des couples formés par η et une composante irréductible locale de H en m.

Fixons un point t d'une variété holomorphe P. Un sous-ensemble analytique W de M est dit *étale au dessus de t via une submersion* $\pi : M \longrightarrow P$ si la restriction de π à W est un difféomorphisme local en chaque point de $\pi^{-1}(t) \cap W$. Cette propriété est ouverte lorque $\pi \mid_W$ est propre. On notera $W_t := \pi^{-1}(t) \cap W$.

Conventions. — Lorsque nous ne précisons pas, les objets considérés ici : variété, courbe, application, champ de vecteurs... sont supposés holomorphes. Nous dirons aussi « 1-forme » pour : « 1-forme différentielle holomorphe ».

1. Introduction

Classiquement la *quasi-homogénéité* d'un germe $f(x, y)$ de fonction holomorphe — ici à l'origine de $\mathbb{C}^2$ — se définit par l'existence de coordonnées $u(x, y), v(x, y)$ dans lesquelles f est *un polynôme quasi-homogène* : son nuage de Newton est contenu dans une droite :

$$f = P(u, v) = \sum_{\alpha i + \beta j = d} P_{ij} u^i v^j .$$

Cette propriété se caractérise algébriquement **[16]** par l'appartenance de f à son *idéal jacobien* $J(f) := (f'_x, f'_y)$. On dispose aussi d'une caractérisation en terme de comparaison des modules de la fonction f à de ceux de la courbe $f^{-1}(0)$. On peut montrer que f est quasi-homogène si et seulement si toute déformation de f

$$F \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2+p},0}, \quad F_0 = f, \quad F_t(0,0) = 0, \qquad F_t(x, y) := F(x, y; t),$$

qui est topologiquement triviale, satisfait l'équivalence : F est analytiquement triviale $\iff$ la famille de germes de courbes $\left(F_t^{-1}(0)\right)_t$ est analytiquement triviale ;

La *trivialité topologique*, resp. la *trivialité analytique*, de F signifie ici l'existence de germes d'homéomorphismes, resp. de biholomorphismes, Φ de $\mathbb{C}^{2+p}, 0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{2+p}, 0$ et L de $\mathbb{C}^{1+p}, 0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{1+p}, 0$, qui commutent avec les projections sur $\mathbb{C}^p, 0$, valent l'identité pour $t = 0$ et satisfont : $L \circ (F;t) \circ \Phi = (f;t)$. Cette dernière relation signifie que Φ conjugue les feuilletages de $\mathbb{C}^{2+p}, 0$ définis par dF et par $df \circ \pi$, avec $\pi(x,y;t) := (x,y)$.

L'objet principal de cet article est d'étudier les notions de quasi-homogénéité pour un germe de feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_\omega$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par un germe de 1-forme

$$\omega := a(x,y)dx + b(x,y)dy, \quad a, b \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \quad \operatorname{Sing}(\omega) = \{0\}.$$

D'après un résultat de C. Camacho et P. Sad **[4]** un tel feuilletage admet toujours une *séparatrice*, c'est à dire un germe à l'origine de courbe analytique irréductible invariante. Il peut en admettre une infinité, on dit alors que ω est *dicritique*. Si ce n'est pas le cas, nous notons $\operatorname{Sep}(\omega)$ ou $\operatorname{Sep}(\mathcal{F}_\omega)$ le germe de l'union des séparatrices de ω.

Définition 1.1. — Nous disons qu'un germe de 1-forme holomorphe non-dicritique ω à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est *topologiquement quasi-homogène* si toute déformation topologiquement triviale $\eta := A(x,y;t)dx + B(x,y;t)dy$ de ω satisfait l'équivalence :

- η est analytiquement triviale si et seulement si la déformation de germes de courbes à l'origine $(\operatorname{Sep}(\eta_t))_t$ est analytiquement triviale,

où η_t désigne le germe à l'origine de la restriction de η à $\mathbb{C}^2 \times t$.

Pour les feuilletages quasi-hyperboliques génériques (définis au chapitre 6) on dispose d'un critère différentiel de trivialité topologique **[14]** **[15]** :

- Une déformation η d'une 1-forme quasi-hyperbolique générique est topologiquement triviale si et seulement si il existe des germes $C_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2+p},0}$ tels que la 1-forme $\Omega := \eta + \sum_j C_j(x,y;t)dt_j$ est intégrable (*i.e.* $\Omega \wedge d\Omega \equiv 0$) et définit un déploiement équisingulier de $\mathcal{F}_\omega$, *cf.* (6.1).

L'espace (lisse de dimension finie) universel des déploiements équisinguliers construit dans **[10]** s'interprète donc comme l'espace des modules analytiques dans une classe topologique donnée. On est ainsi ammené à définir au chapitre 6 la notion de *quasi-homogénéité au sens des déploiements* ou encore *d-quasi-homogénéité* d'une 1-forme ω par la propriété suivante : « Tout déploiement équisingulier Ω de ω satisfait l'équivalence : Ω est analytiquement trivial $\Longleftrightarrow$ la famille de germes de courbe $(\operatorname{Sep}(\Omega_t))_t$ est analytiquement triviale ». On peut alors affaiblir les hypothèses et considérer la classe plus large des 1-formes non-dicritiques dont la résolution ne comporte aucune singularité de type selle-nœud ; ces formes seront appellées *semi-hyperboliques*. On obtient :

Théorème A. — *Soit $\omega := a(x,y)dx + b(x,y)dy$ un germe de 1-forme holomorphe semi-hyperbolique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $f(x,y) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ une équation réduite de* $\operatorname{Sep}(\omega)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *ω est d-quasi-homogène,*

(2) *f appartient à l'idéal $(a,b) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$,*
(3) *df est topologiquement quasi-homogène,*
(4) *f appartient à l'idéal $(f'_x, f'_y) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$,*
(5) *il existe des coordonnées u, v à l'origine, des fonctions $g, h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ avec $u(0) = v(0) = 0$, $g(0) \neq 0$ et des entiers α, β, $d \in \mathbb{N}$ tels que : f s'exprime comme un polynôme quasi-homogène $f = \sum_{\alpha i+\beta j=d} P_{ij} u^i v^j \in \mathbb{C}[[u,v]]$ et $g\omega = df + h\,(\beta v du - \alpha u dv)$.*

Ce théorème appliqué aux 1-formes quasi-hyperboliques génériques donne directement :

Théorème B. — *Soit $\omega := a(x,y)dx + b(x,y)dy$ un germe de 1-forme holomorphe quasi-hyperbolique générique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $f(x,y) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ une équation réduite de* $\mathrm{Sep}(\omega)$. *Alors les assertions* (2) (3) (4) *et* (5) *du théorème A sont équivalentes à*

(1′) *ω est topologiquement quasi-homogène.*

Pour montrer le théorème A nous serons ammenés (6.7) à prouver le

Théorème. — *Soit ω un germe de 1-forme semi-hyperbolique. Alors toute déformation topologiquement triviale $(X_t)_t$ de $X_0 :=$ $\mathrm{Sep}(\omega)$ est réalisée comme la famille de séparatrices d'un déploiement équisingulier. En particulier il existe une déformation topologiquement triviale η de ω, à pseudo-groupe d'holonomie constant, telle que pour t assez petit $X_t =$ $\mathrm{Sep}(\eta_t)$.*

Lorsque ω n'est pas quasi-homogène, nous mettons en évidence sur l'espace universel des déploiements équisinguliers un « feuilletage singulier », défini par un sous-module involutif du module des germes de champs de vecteurs holomorphes, dont « l'espace des feuilles » s'identifie à l'espace des modules locaux du germe de courbe $\mathrm{Sep}(\omega)$.

Enfin au chapitre 7 nous comparons l'idéal (a,b) de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ engendré par les coefficients de ω, à l'idéal définissant $\mathrm{Sep}(\omega)$. On obtient le résultat suivant qui généralise — et redémontre — un théorème de J. Briançon **[2]**, **[3]** :

Théorème C. — *Soit $\omega := a(x,y)dx + b(x,y)dy$ un germe de 1-forme holomorphe semi-hyperbolique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $f = 0$ une équation réduite de* $\mathrm{Sep}(\omega)$. *Alors f^2 appartient à l'idéal (a,b).*

2. Réduction des singularités et équiréduction

Rappelons qu'un germe de 1-forme singulière $\omega := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est dit *réduit* s'il existe des coordonnées locales u, v, $u(0) = v(0) = 0$, dans lesquelles le saturé de ω à l'origine s'ecrit $\omega'_0 = udv + \lambda v du + \cdots$, $\lambda \notin \mathbb{Q}_{<0}$. Lorsque le saturé de $\mathcal{F}_\omega$ est régulier à l'origine nous dirons encore que ω est réduit. Plus généralement, η désignant une 1-forme sur une surface M et $Z \subset M$ une courbe à