ALBERT FATHI

Une caractérisation des stades à virages circulaires

Astérisque, tome 261 (2000), p. 89-101
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__261__89_0>

Astérisque
261, 2000, p. 89–101

UNE CARACTÉRISATION DES STADES À VIRAGES CIRCULAIRES

par

Albert Fathi

Résumé. — Nous donnons une minoration du volume d'un domaine compact convexe d'un espace euclidien dont le bord est de classe $C^{1,1}$. Nous caractérisons le cas d'égalité.

0. Introduction

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. La sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ est notée $\mathbb{S}^{n-1}$.

Afin de simplifier, dans cette introduction, nous allons considérer un convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide et de bord C^2. Pour $x \in \partial K$, notons $N(x)$ le vecteur unitaire normal à ∂K en x et pointant à l'extérieur de K. L'application $N : \partial K \to \mathbb{S}^{n-1}$ est C^1. Puisque les espaces tangents $T_x\partial K$ et $T_{N(x)}\mathbb{S}^{n-1}$ sont tous les deux égaux au sous-espace vectoriel $N(x)^\perp$ orthogonal à $N(x)$, la dérivée $DN(x)$ est donc une application linéaire de $N(x)^\perp$ dans lui-même, on sait qu'elle est symétrique et définie positive. Les valeurs propres de $DN(x)$, notées $\kappa_1(x), \ldots, \kappa_{n-1}(x)$, sont donc ≥ 0, on les appelle les courbures principales. On a $\|DN(x)\| = \max(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_{n-1}(x))$, puisque $DN(x)$ est symétrique. Les rayons de courbure principaux $R_1(x), \ldots, R_{n-1}(x)$ sont les inverses $\kappa_1(x)^{-1}, \ldots, \kappa_{n-1}(x)^{-1}$. Soit $H_i(x)$ la $i^{\text{ème}}$ fonction symétrique de $\kappa_1(x), \ldots, \kappa_{n-1}(x)$. On note par σ la mesure d'aire induite par la métrique euclidienne sur ∂K. On définit $\mathcal{H}_i(K) = \int_{\partial K} H_i(x)\, d\sigma(x)$. Le théorème de Gauss-Bonnet donne $\mathcal{H}_{n-1}(K) = s_{n-1}$ l'aire de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$.

On pose :

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{sup}} &= \sup\{\kappa_i(x) \mid x \in \partial K,\ i = 1, \ldots, n-1\} \\ R_{\text{inf}} &= \inf\{R_i(x) \mid x \in \partial K,\ i = 1, \ldots, n-1\}. \end{aligned}$$

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 52A10, 52A20, 52A40, 53C99.
Mots clefs. — Convexe, rayon de courbure, Blaschke, volume.

En particulier, on a $\kappa_{\sup} = \sup\{\|DN(x)\| \mid x \in \partial K\}$.

Blaschke a montré qu'une boule de rayon $R_{\inf}$ roulait librement à l'intérieur de K, (*cf.* [**Bl**, pages 114–119] et [**Le**, Theorem 2.1, page 1055]). Si on définit l'application $\mathcal{N} : \partial K \times [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ par $\mathcal{N}(x,t) = x - tN(x)$, le théorème de Blaschke montre que $\mathcal{N}$ est un plongement de $\partial K \times [0, R_{\inf}[$ dans K. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 0.1. — *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est de classe C^2, alors, on a :*

$$V(K) \geq R_{\inf} S(K) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i R_{\inf}^{i+1} \frac{\mathcal{H}_i}{i+1},$$

où $V(K)$ est le volume de K et $S(K)$ est l'aire de son bord ∂K.

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si K est une boule euclidienne.

Plus généralement, si K est un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est C^1, on dit que K est $\mathrm{C}^{1,1}$ si le plan tangent $T_x\partial K$ est lipschitzien comme fonction de $x \in \partial K$. Il revient au même de dire que l'application normale $N : \partial K \to \mathbb{S}^{n-1}$ est lipshitzienne. Dans ce cas, les courbures sont définies presque partout. On peut voir que l'on peut faire rouler librement une boule de rayon $R > 0$ à l'intérieur d'un compact convexe K si et seulement si ∂K est $\mathrm{C}^{1,1}$ (*cf.* [**Ho**, Proposition 2.4.3, p. 97]). Il n'est donc pas étonnant que le théorème précédent s'étende au cas $\mathrm{C}^{1,1}$. Le cas d'égalité ayant lieu précisément quand $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) \leq R\}$ avec C compact convexe de dimension $\leq n-1$ et $R > 0$.

Dans le cas où $C = S$ est un segment de $\mathbb{R}^2$, un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, S) \leq R\}$ est ce que l'on appelle, pour des raisons visuelles évidentes, un *stade à virages circulaires*. Remarquons que le bord d'un tel stade est soit un cercle de rayon R si S est réduit à un point, soit la réunion de deux segments, de mêmes longueurs et parallèles à S et de deux demi-cercles de rayon R, par conséquent si S n'est pas réduit à un point, un tel stade n'est jamais C^2.

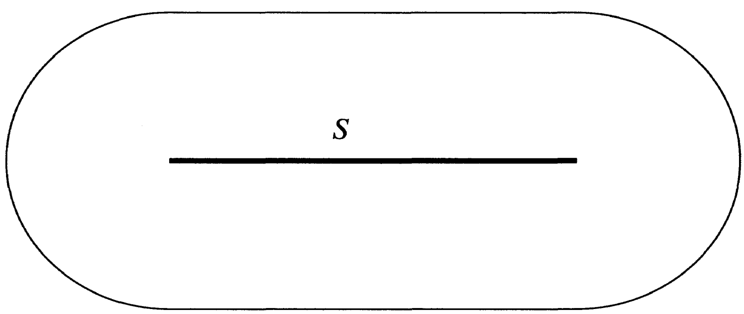

FIGURE 1. Un stade à virages circulaires.

Le théorème suivant donne une caractérisation des stades circulaires :

Théorème 0.2. — *Soit C une courbe convexe fermée plane de classe $C^{1,1}$. Notons par l sa longueur, par A l'aire entourée et par R_{inf} la borne inférieure des rayons de courbure. On a :*

$$A \geq lR_{\mathrm{inf}} - \pi R_{\mathrm{inf}}^2.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si C borde un stade à virages circulaires.

Remarque 0.3. — 1) Quand ce manuscrit était pratiquement terminé, Victor Bangert nous a communiqué les travaux d'Innami [**In**$_1$, **In**$_2$]. Certains des résultats d'Innami sont très proches des nôtres. En fait, bien que l'inégalité qu'Innami établit dans [**In**$_1$, Corollary 2], pour les hypersurfaces convexes lisses, soit moins bonne que la nôtre, les méthodes utilisées dans son travail sont les mêmes que les nôtres (en particulier, [**In**$_1$, Lemma 5] n'est rien d'autre que le théorème de Blaschke) et donc un examen de sa démonstration donne l'inégalité du théorème 0.1 ci-dessus. Bien sûr, sa minoration du volume étant moins bonne, le cas d'égalité est plus facile à analyser. Par ailleurs ses méthodes ne s'appliquent pas au cas des convexes de bord de classe $\mathrm{C}^{1,1}$.

2) Dans [**In**$_1$], Innami établit aussi une minoration de $V(K)$ pour le cas où K est de bord lisse mais n'est pas nécessairement convexe. Il faut, alors, remplacer R_{inf} par le rayon $r(K)$ de la plus grande boule euclidienne qui roule librement à l'intérieur de K. Un examen de sa démonstration, ou de la démonstration du théorème 1.1 ci-dessous, montre que l'on peut établir la même inégalité que dans le théorème 1.1, à condition de remplacer R_{inf} par $r(K)$, dès que ∂K est $\mathrm{C}^{1,1}$ (on peut voir que cette dernière condition implique $r(K) > 0$). Il serait intéressant d'analyser le cas d'égalité.

3) Dans [**Ga**], on établit l'inégalité $\pi l/A \leq \int_0^l \kappa(s)^2\, ds$, pour une courbe convexe C de classe C^2 dans le plan. Cette inégalité est optimale quand C s'approche d'un cercle. Si C s'approche d'un stade à virages circulaires quelconque, on voit que $\int_0^l \kappa(s)^2\, ds$ tend vers $2\pi/R_{\mathrm{inf}}$. L'inégalité de Gage devient donc dans ce cas limite $A \geq lR_{\mathrm{inf}}/2$, ce qui est moins bon que le théorème 1.2, dans le cas d'un stade qui n'est pas un disque.

4) Il est bon de signaler ici que si C est un convexe dans $\mathbb{R}^n$, les ensembles de la forme $C_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,C) = R\}$ sont tous, pour $R > 0$, des convexes à bord $\mathrm{C}^{1,1}$. Ceci résulte du fait, bien connu, que $x \mapsto d(x,C)$ est $\mathrm{C}^{1,1}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus C$. Pour une démonstration, on peut consulter par exemple [**Ho**, theorem 2.1.30, p. 62], où il est montré que cette fonction est différentiable ; de plus, son gradient sur $\mathbb{R}^n \setminus C$ est donné par $x \mapsto (x - p_C(x))/\|x - p_C(x)\|$, où $p_C : \mathbb{R}^n \to C$ est la projection sur le point le plus proche de C. Or p_C est lipschitzienne. (On peut voir qu'une fonction distance à un fermé F dans une variété riemannienne M qui est différentiable en tous les points de $M \setminus F$ est, en fait, $\mathrm{C}^{1,1}$ sur $M \setminus F$).

1. Un théorème de Blaschke

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe. Les observations suivantes sont élémentaires et bien connues (*cf.* par exemple le paragraphe 3.1 sur la soustraction de Minkowski dans [**Sc**]). Si $r \geq 0$, on pose :

$$K_r^- = \{x \in K \mid d(x, \partial K) \geq r\}.$$

L'ensemble K_r^- est un compact convexe. La convexité résulte du fait que $x \in K_r^-$ si et seulement si $x + B(0,r) \subset K$. On peut voir que la frontière de K_r^- dans $\mathbb{R}^n$ est $\partial K_r^- = \{x \in K \mid d(x, K) = r\}$. On a aussi $\mathring{K}_r^- = \cup_{s>r} K_s^-$, où $\mathring{K}_r^-$ désigne l'intérieur du compact K_r^-. En particulier, si on pose $\rho_{\max} = \sup\{r \geq 0 \mid \exists x \in K,\ d(x, \partial K) = r\}$, on a $K_r^- = \varnothing$ pour $r > \rho_{\max}$, l'ensemble $K_{\rho_{\max}}^-$ est un convexe compact non vide de dimension $\leq n-1$ et, pour $r < \rho_{\max}$, la frontière ∂K_r^- est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ et $\mathring{K}_r^- \neq \varnothing$. (Le nombre $\rho_{\max}$ est le rayon de la plus grande boule euclidienne contenue dans K.)

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est de classe $C^{1,1}$. Pour $x \in \partial K$, notons $N(x)$ le vecteur unitaire normal à ∂K en x orienté vers l'extérieur de K. L'application $N : \partial K \to \mathbb{S}^{n-1}$ est lipschitzienne. Posons :

$$\kappa_{\sup} = \lim_{\varepsilon \to 0} \max\left\{ \frac{\|N(x) - N(x')\|}{\|x - x'\|} \mid x, x' \in \partial K,\ x \neq x',\ \|x - x'\| \leq \varepsilon \right\},$$

et on définit $R_{\inf} = \kappa_{\sup}^{-1}$.

Si ∂K est C^2, alors cette définition coincide avec celle donnée plus haut, car les deux définitions donnent la constante Lipschitz de $N : \partial K \to \mathbb{R}^n$, où ∂K est muni de la métrique intrinsèque.

Si K a un bord de classe $C^{1,1}$, on peut aussi définir l'application $\mathcal{N} : \partial K \times [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ par $\mathcal{N}(x,t) = x - tN(x)$.

Nous donnons une démonstration du théorème de Blaschke valable dans le cas $C^{1,1}$.

***Théorème 1.1* (Blaschke).** — *Soit K un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est de classe $C^{1,1}$. Pour tout $x \in \partial K$ et tout $r \in [0, R_{\inf}]$, on a*

$$d(x - rN(x), \partial K) = r.$$

Démonstration. — Pour $r \geq 0$, considérons l'application partielle

$$\mathcal{N}_r : \partial K \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \mathcal{N}(x, r).$$

On a pour tout $r \geq 0$ l'inclusion $\partial K_r^- \subset \mathcal{N}_r(\partial K)$. En effet, si $x \in K$ est tel que $d(x, \partial K) = r > 0$, soit $x_0 \in \partial K$ tel que $d(x, x_0) = r$, comme ∂K est C^1 et x_0 réalise le minimum de $d(y, x)$ pour $y \in \partial K$, on a que $x_0 - x$ est colinéaire à la normale $N(x_0)$, par conséquent $x = x_0 - rN(x_0) = \mathcal{N}_r(x_0)$, puisque $\|x - x_0\| = r$ et $N(x_0)$ pointe à l'extérieur de K.

Posons alors

$$R_0 = \sup\{r \in [0, R_{\inf}] \mid \forall\, x \in \partial K,\ \forall\, s \in [0, r],\ d(\mathcal{N}_s(x), \partial K) = s\}.$$