Astérisque

JUAN RIVERA-LETELIER

Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux

Astérisque, tome 287 (2003), p. 147-230

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2003__287__147_0>

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
287, 2003, p. 147–230

DYNAMIQUE DES FONCTIONS RATIONNELLES SUR DES CORPS LOCAUX

par

Juan Rivera-Letelier

Em homenagem a Jacob, na acasião de seu sexagésimo aniversário.

Résumé. — Soit $p > 1$ un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et soit $\mathbb{C}_p$ la plus petite extension complète et algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$. Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique des fonctions rationnelles sur la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

À chaque fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ on associe son *domaine de quasi-périodicité*, qui est égal à l'intérieur de l'ensemble des points dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui sont récurrents par R. On donne plusieurs caractérisations du domaine de quasi-périodicité et on décrit sa dynamique locale et globale.

On montre que les composantes du domaine de quasi-périodicité (qui sont les analogues p-adiques des disques des Siegel et des anneaux de Herman) sont des affinoïdes ouverts (c'est-à-dire que leur géométrie est simple) et on décrit la dynamique sur une composante donnée.

Comme dans le cas complexe on a une partition de la droite $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ en l'ensemble de Fatou et l'ensemble de Julia. Par analogie au cas complexe on fait la conjecture de non-errance suivante : tout disque errant est attiré par un cycle attractif. On montre que ceci a lieu si et seulement si tout point dans l'ensemble de Fatou est soit attiré par un cycle attractif, soit rencontre le domaine de quasi-périodicité par itération positive.

Introduction

Ce travail est essentiellement ma thèse de doctorat, laquelle a été soutenue à Orsay pendant l'année 2000.

Soit p un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique des fonctions rationnelles à coefficients dans des extensions de $\mathbb{Q}_p$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32H50, 37F10, 14G20, 39B12.
Mots clefs. — Systèmes dynamiques, théorie itérative, corps locaux, quasi-périodique.

Je remercie la Fundación Andes, Beca Presidente de la Republica de Chile et la Fundación Rivera Letelier pour son soutien financier.

© Astérisque 287, SMF 2003

Il y a des questions en théorie des nombres qui sont reliées aux systèmes dynamiques et les gens ont étudié, plus ou moins implicitement, des systèmes dynamiques depuis longtemps. Par exemple, la définition de la fraction continue d'un nombre réel est reliée à l'itération de l'application de Gauss $x \to 1/x - [1/x]$. Notamment on a la relation suivante entre la théorie des courbes elliptiques et l'itération des fonctions rationnelles. On considère une courbe elliptique

$$E \,:\, y^2 = x^3 + ax + b,$$

où a et b appartiennent à un corps de nombres K (extension finie des rationnels). Pour toute extension L de K l'ensemble $E(L)$ de points dans E à coordonnées dans L a une structure de groupe abélien, avec $\mathcal{O} = (\infty, \infty)$ comme élément neutre. Cette structure est définie par,

$$(x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (\lambda^2 - x_0 - x_1, \lambda(\lambda^2 - x_0 - x_1) + \nu)$$

où $\lambda = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ si $x_1 \neq x_0$ et $\lambda = (3x_0^2 + a)/2y_0$ si $x_1 = x_0$ et $\nu = y_0 - \lambda x_0 = y_1 - \lambda x_1$. Géométriquement la somme de trois points est égal à $\mathcal{O}$ si et seulement si les trois points sont colinéaires. On dit qu'un point de E est de *torsion* s'il existe $n \geqslant 1$ tel que

$$[n]P = \underbrace{P + \cdots + P}_{n} = \mathcal{O}.$$

Ceci a lieu si et seulement si P est pré-périodique pour l'application de doublement $P \to [2]P$, c'est-à-dire qu'il existe $k \geqslant 0$ et $l \geqslant 1$ tels que $[2^k]P = [2^{k+l}]P$. La première coordonnée de l'application de doublement est donnée par

$$x([2](x_0, y_0)) = \frac{x_0^4 - 2ax_0^2 - 8bx_0 + a^2}{4x_0^3 + 4ax_0 + 4b},$$

qui ne dépend que de x_0. On voit alors qu'un point (x, y) de E est un point de torsion si et seulement si x est pré-périodique pour cette fonction rationnelle de degré 4. Ainsi l'étude des points de torsion K-rationnels d'une courbe elliptique est étroitement reliée à l'étude des points pré-périodiques sur K d'une fonction rationnelle.

Il y a beaucoup de résultats dans ce dernier contexte ; on renvoie le lecteur aux références de [**MS2**] et [**Be**]. Northcott a montré une propriété fondamentale :

***Théorème* (Northcott [No]).** — *Soit K un corps de nombres. Alors toute fonction rationnelle à coefficients dans K, de degré au moins deux, a un nombre fini de points pré-périodiques sur la droite projective $\mathbb{P}(K)$.*

Ce théorème vaut en dimension quelconque ; voir aussi Lewis [**Le**]. On donne une nouvelle démonstration de ce théorème (en dimension 1) dans un cadre légèrement plus général (Section 4.5).

Morton et Silverman ont conjecturé qu'il existe une borne pour le nombre de points pré-périodiques qui ne dépend que du degré de $[K : \mathbb{Q}]$ de K et du degré de la fonction rationnelle ; voir [**MS1**].

Principe de Hasse. — Dans ce genre de problème il y a un principe appelé *principe de Hasse.* Hasse a montré le théorème suivant ; voir e.g. [**Ca**].

Théorème **(Hasse)**. — *La forme quadratique,*

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2, \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q},$$

a un zéro non-trivial sur $\mathbb{Q}^n$ *si et seulement s'il en a sur* $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}^n$ *pour toute valeur absolue* $\mathcal{P}$, *où* $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ *dénote la complétion de* $\mathbb{Q}$ *par* $\mathcal{P}$.

Rappelons que une valeur absolue $\mathcal{P}$ sur un corps K est une fonction $\mathcal{P} : K \to \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}(x) \geqslant 0$, $\mathcal{P}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, $\mathcal{P}(xy) = \mathcal{P}(x)\mathcal{P}(y)$ et $\mathcal{P}(x + y) \leqslant \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y)$, pour tout $x, y \in K$.

L'importance de ce théorème est que souvent il est plus facile de déterminer si une forme quadratique a des zéros non-triviaux sur $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}^n$ que sur $\mathbb{Q}^n$, car $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ est complet.

Le principe de Hasse consiste à : d'abord, traiter le problème sur les différentes complétions du corps de base et après, essayer de recoller l'information. Mais on n'a pas toujours une équivalence comme dans le théorème de Hasse. Par exemple l'équation $(x^2 - 2)(x^2 - 17)(x^2 - 34) = 0$ a une solution sur toute complétion de $\mathbb{Q}$, mais n'a pas des solutions sur $\mathbb{Q}$. Il en est de même pour la courbe elliptique $2y^2 = x^4 - 17$; voir [**Ca**].

Dynamique des fonctions rationnelles. — Si l'on veut appliquer le principe de Hasse pour étudier la dynamique d'une fonction rationnelle à coefficients dans un corps de nombres, on doit étudier d'abord la dynamique des fonctions rationnelles sur les différentes complétions du corps de base.

Il y a deux types de valeurs absolues : les *non-archimédiennes* qui satisfont l'inégalité triangulaire forte : $|x + y| \leqslant \max\{|x|, |y|\}$, et les *archimédiennes* qui ne la satisfont pas. D'après un théorème de Orstrowski la complétion d'un corps de nombres par rapport à une valeur absolue archimédienne est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{R}$; voir par exemple [**Ca**].

Parfois il est plus facile d'étudier la dynamique d'une fonction rationnelle sur $\mathbb{C}$ que sur $\mathbb{R}$ car on profite du fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. L'étude de la dynamique d'une fonction rationnelle complexe est classique et elle a été initiée par Fatou et Julia dans les années 1910. Depuis ces premiers travaux, et notamment dans les vingt dernières années, la dynamique des fonctions rationnelles complexes a connu un grand développement, même si des questions fondamentales comme la densité de l'hyperbolicité sont encore ouvertes.

L'étude de la dynamique des fonctions rationnelles sur des corps non-archimédiens est plus récente ; voir [**MS1**], [**Hs**] et [**Be**]. Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique d'une fonction rationnelle dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}_p$, qui est la plus petite extension complète et algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$.

Généralités sur le corps $\mathbb{C}_p$. — La *norme p-adique* sur $\mathbb{Q}$, notée $|\cdot|_p$, est définie par $|p^\nu r/s|_p = p^{-\nu}$, pour $\nu \in \mathbb{Z}$ et pour tous les entiers r et s qui ne sont pas divisibles par p. On note $\mathbb{Q}_p$ la complétion de $\mathbb{Q}$ par la norme p-adique et on l'appelle le *corps des nombres p-adiques.* On peut étendre $|\cdot|_p$ à la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. La complétion de $\overline{\mathbb{Q}}$ est le corps $\mathbb{C}_p$, qui est aussi algébriquement clos.

Comme p est fixe, on note $|\cdot|_p$ simplement par $|\cdot|$. Une *boule fermée* (resp. *ouverte*) de $\mathbb{C}_p$ est un ensemble de la forme $B_r(a)^+ = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a| \leqslant r\}$ (resp. $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a| < r\}$) où $r \in |\mathbb{C}_p| = \{|z| \mid z \in \mathbb{C}_p - \{0\}\}$. Notons que tout élément $w \in B_r^+(a)$ (resp. $w \in B_r(a)$) est un centre ; $B_r^+(w) = B_r^+(a)$ (resp. $B_r(w) = B_r(a)$) et si deux boules fermées (resp. ouvertes) s'intersectent, alors l'une est contenue dans l'autre. Dans la droite projective on appelle boule fermée (resp. ouverte) le complémentaire d'une boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{C}_p$. La notion de boule de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est alors invariante par automorphismes projectifs.

Une propriété des fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ qui simplifiera la géométrie est que les fonctions rationnelles préservent les affinoïdes. Un *affinoïde fermé* (resp. *ouvert*) *connexe* est une intersection finie non-vide de boules fermées (resp. ouvertes) de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et un *affinoïde fermé* (resp. *ouvert*) est une union finie d'affinoïdes fermés (resp. ouvertes) connexes. Alors l'image et la préimage d'un affinoïde fermé (resp. ouvert) par une fonction rationnelle est aussi un affinoïde fermé (resp. ouvert) (Proposition 2.6). Une union d'affinoïdes connexes fermés qui contient un point donné est appelé un *espace analytique connexe.* Alors la classe des espaces analytiques, qui sont les unions finies de espaces analytiques connexes, est aussi invariante par les fonctions rationnelles.

On prendra cette notion pour définir une notion de composante connexe : la *composante analytique* d'une partie ouverte X de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui contient $z_0 \in X$ est l'union de tous les espaces analytiques connexes qui contient z_0 et qui sont contenus dans X ; voir [**Be**]. Notons qu'une composante analytique est un espace analytique connexe non-vide.

Les *fonctions holomorphes* définies sur les affinoïdes fermés connexes sont les limites uniformes de fonctions rationnelles sans pôles sur l'affinoïde. Une telle fonction est constante ou a un nombre fini de zéros. Alors une fonction définie sur un espace analytique est *holomorphe* si sa restriction à tout affinoïde fermé connexe est holomorphe ; voir [**FvP**] et Sections 1.2 et 1.3.3.

Points périodiques. — Rappelons que si z_0 est un point périodique de R de période minimale k alors $\{z_0, R(z_0), \ldots, R^{k-1}(z_0)\}$ est le *cycle* de z_0 ; $\lambda = (R^k)'(z_0)$ ne dépend que du cycle et est appelé le *multiplicateur* du cycle. On considère la classification suivante des points périodiques, en analogie avec le cas complexe.

• Si $|\lambda| < 1$ on dit que z_0 est *attractif.* Si de plus $\lambda = 0$, alors on dit que z_0 est *super-attractif.*