Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques

Astérisque, tome 295 (2004), p. 1-115

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__295__1_0>

Astérisque
295, 2004, p. 1–115

ARITHMÉTIQUE DES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES p-ADIQUES

par

Jean-Marc Fontaine

Résumé. — Soient K un corps p-adique, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique, B_{dR} le corps des périodes p-adiques, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On commence par expliquer les calculs de Sen et Tate sur la cohomologie galoisienne continue de C et de $GL_h(C)$. On donne ensuite une classification, essentiellement due à Sen, des *C-représentations de G_K* (c'est-à-dire des C-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K) puis des *B_{dR}-représentations de G_K*. On applique ceci aux représentations p-adiques de G_K, puis on décrit les principaux faits de la théorie des *représentations p-adiques semi-stables*. On termine en prouvant que les seuls endomorphismes $\mathbb{Q}_p$-linéaires continus G_K-équivariants de C sont les homothéties par des éléments de K, puis que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C-représentations de G_K dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

Table des matières

0. Introduction 2
1. Le corps C et sa cohomologie continue 10
2. C-représentations : la théorie de Sen 25
3. B_{dR}-représentations 45
4. Généralités sur les représentations p-adiques 73
5. Représentations semi-stables et (φ, N)-modules filtrés 79
6. L'action de C perdue et retrouvée 107
Références 113

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 11F85, 11S15, 11S20, 11S25.
Mots clefs. — Corps locaux, périodes p-adiques, représentations galoisiennes.

0. Introduction

Dans ce texte on s'intéresse aux représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un corps p-adique et en particulier, on définit toute une hiérarchie parmi ces représentations (représentations presque de Hodge-Tate, de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stables, cristallines).

Ce texte contient des résultats classiques (notamment la théorie de Sen [**Sen69**], objet essentiel des chapitres 1 et 2) ou déjà publiés ailleurs (notamment le théorème *faiblement admissible implique admissible* [**CF00**], dont on parle dans le chapitre 5, on ne donne ici qu'une esquisse de la preuve). Il contient aussi des résultats non publiés ailleurs comme

– l'analogue de la théorie de Sen lorsque l'on remplace le corps $\mathbb{C}_p$ par le corps B_{dR} (chapitre 3),

– la notion de représentation p-adique *presque de Hodge-Tate* et de représentation p-adique *presque de de Rham* et le fait que ces deux notions coïncident (chapitre 4),

– le fait qu'il n' y a pas d'autre $\mathbb{Q}_p$-endomorphisme continu de $\mathbb{C}_p$, Galois-équivariant, que les homothéties par un élément du corps de base (chapitre 6). Ceci est — avec une version renforcée du lemme fondamental de [**CF00**] due à Pierre Colmez [**Co02**] — à la base de la théorie des *presque $\mathbb{C}_p$-représentations*, développée ailleurs [**Fo03**].

Rentrons un peu plus dans les détails. Dans tout ce texte, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et on note I_K le sous-groupe d'inertie. On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique (corps souvent noté $\mathbb{C}_p$ lorsque k est algébrique sur $\mathbb{F}_p$) et B_{dR} le corps des périodes p-adiques (la définition de B_{dR} est rappelée au chapitre 3). Il est muni d'une topologie naturelle. Le groupe G_K opère continûment sur C et sur B_{dR}.

Une *représentation p-adique de G_K* consiste en la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K. Avec comme morphismes les applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires G_K-équivariantes, les représentations p-adiques de G_K forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

Plus généralement, soient J un groupe topologique et B un corps muni d'une topologie et d'une action continue de J (compatible avec la structure de corps). On appelle *B-représentation de J* la donnée d'un B-espace vectoriel W de dimension finie muni d'une action semi-linéaire et continue de J (dire que l'action est semi-linéaire signifie

i) que l'on a $g(w_1 + w_2) = g(w_1) + g(w_2)$ si $g \in J$ et $w_1, w_2 \in W$,

ii) et que l'on a $g(bw) = g(b)g(w)$ si $g \in J$, $b \in B$ et $w \in W$).

Avec comme morphismes les applications B-linéaires J-équivariantes, les B-représentations de J forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{Rep}_B(J)$.

Si l'action de J sur B est non triviale, cette catégorie n'est pas B-linéaire. Dans tous les cas, si $E = B^J$, E est un corps et $\mathrm{Rep}_B(J)$ est E-linéaire.

On sait aussi définir la représentation unité (c'est B muni de l'action donnée de J), le produit tensoriel de deux B-représentations W_1 et W_2 (c'est $W_1 \otimes_B W_2$ avec $g(w_1 \otimes w_2) = g(w_1) \otimes g(w_2)$ si $g \in J$, $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$) et la représentation duale de la B-représentation W (c'est le B-espace vectoriel dual W^* de W, avec $(g(\eta))(w) = g(\eta(g^{-1}(w)))$ si $g \in J$, $\eta \in W^*$ et $w \in W$).

Muni de ces structures, $\mathrm{Rep}_B(J)$ devient ce que l'on appelle *une catégorie tannakienne sur E* (*cf.* par exemple, [**DM82**]).

Une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_B(J)$ est une sous-catégorie strictement pleine (*i.e.* une sous-catégorie pleine telle que, si W est un objet de cette catégorie, alors tout objet de $\mathrm{Rep}_B(J)$ isomorphe à W aussi) qui contient l'objet-unité B et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual.

Ceci s'applique en particulier à $B = \overline{K}$, C ou B_{dR} et $J = G_K$. Si V est une représentation p-adique de G_K de dimension h, $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est de manière naturelle une B-représentation de G_K. Disons que V est *B-admissible* si cette B-représentation est triviale (*i.e.* isomorphe à B^h). Les représentations B-admissibles forment une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

Proposition 0.0. — *Soit V une représentation p-adique de G_K. Pour que V soit $\overline{K}$-admissible, il faut et il suffit que le noyau de l'action de G_K sur V soit un sous-groupe ouvert de G_K.*

Démonstration. — Le fait que la condition est nécessaire résulte immédiatement de ce que l'action de G_K sur $\overline{K}$ est discrète. Réciproquement, supposons que le noyau N de l'action de G_K sur V soit ouvert dans G_K et soit $L = \overline{K}^N$. Soit h la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Choisissons une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$ de V sur $\mathbb{Q}_p$; elle s'identifie aussi, de façon évidente, à une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L ainsi qu'à une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur $\overline{K}$. L'action de G_K sur V se factorise à travers le groupe $J = \mathrm{Gal}(L/K)$. Pour tout $g \in J$, notons $\rho(g)$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes de $g(e_j)$ sur la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$. On obtient ainsi un homomorphisme $\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \to GL_h(\mathbb{Q}_p)$ que l'on peut voir, via l'inclusion $GL_h(\mathbb{Q}_p) \subset GL_h(L)$ comme un 1-cocycle de J à valeurs dans $GL_h(L)$. On voit que remplacer ce cocycle par un cocycle équivalent revient à changer la base du L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme l'ensemble pointé $H^1(J, GL_h(L))$ est trivial (*cf.* par exemple [**CL**], chap. X, prop. 3), il existe une base de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur L formée d'éléments fixes par J. C'est aussi une base de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ formée d'éléments fixes par G_K et l'existence d'une telle base permet de définir un isomorphisme de $\overline{K}^h$ sur $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui commute à l'action de G_K. □

– C'est un théorème profond de Sen dont nous ne parlons pas ici (*cf.* [**Sen73**], cor. 1), que V est C-admissible si et seulement si le noyau de l'action de I_K est un sous-groupe ouvert de I_K (en particulier, lorsque k est algébriquement clos, si une représentation p-adique de G_K est C-admissible, elle est déjà $\overline{K}$-admissible).

– Il n'existe pas (à notre connaissance) de caractérisation de ce type pour les représentations p-adiques de G_K qui sont *de de Rham* (c'est ainsi qu'on appelle les représentations B_{dR}-admissibles).

Si V est une représentation p-adique de G_K, $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$) est une C-représentation (resp. une B_{dR}-représentation) de G_K qui est non triviale si et seulement si V n'est pas C-admissible (resp. n'est pas de de Rham). D'où l'intérêt qu'il y a à étudier les catégories $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ et $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$[(1)]. L'étude de la première est la théorie de Sen. Nous la reprenons, la poussons « jusqu'au bout » et nous intéressons aussi à la seconde. On obtient une classification complète de ces représentations. Si $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$) désigne l'ensemble des orbites de $\overline{K}$ (resp. $\overline{K}/\mathbb{Z}$) sous l'action de G_K, les classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K})$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z})$). Les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}_{B_{\mathrm{dR}}}(G_K)$ sont paramétrées par $\mathcal{C}(\overline{K}) \times \mathbb{N}^*$ (resp. $\mathcal{C}(\overline{K}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}^*$).

Décrivons maintenant le contenu des différents chapitres.

L'objectif essentiel du chapitre 1 est d'exposer les résultats de Tate et Sen sur la cohomologie continue du corps C. Ils reposent sur une étude fine de la ramification dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K (*i.e.* l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞ de K contenue dans le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p).

Le point crucial est *le théorème fondamental de Tate* (th. 1.8) qui est à la base de toute la théorie des périodes p-adiques et qui, comme on le dit maintenant ([**Fa02**], § 2), signifie que l'anneau des entiers $\mathcal{O}_M$ de toute extension finie M de K_∞ est *presqu'étale* sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K_\infty}$ de K_∞. De façon précise, si $\mathrm{tr}_{M/K_\infty} : M \to K_\infty$ est la trace et si $\mathfrak{m}_{K_\infty}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathcal{O}_{K_\infty}$, ou bien $\mathrm{tr}_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M) = \mathfrak{m}_{K_\infty}$.

Posons $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, $\Gamma = G_K/H_K$ et notons L l'adhérence de K_∞ dans C. Les principaux résultats (dus à Tate et Sen) sont (th. 1.1) que $C^{H_K} = L$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $H^1_{\mathrm{cont}}(H_K, GL_h(C)) = 1$; puis (th. 1.2) que $L^\Gamma = C^{G_K} = K$ et que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(K_\infty)) \to H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma, GL_h(L)) = H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, GL_h(C))$ est bijective.

Dans le chapitre 2, on étudie la catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$. Le premier théorème de Sen dit que, pour toute C-représentation W de G_K, l'application C-linéaire $C \otimes_L W^{H_K} \to W$ déduite de l'inclusion de W^{H_K} dans W est un isomorphisme.

(1) Le fait que $\overline{K}$ n'est pas complet rend illusoire l'étude de la catégorie $\mathrm{Rep}_{\overline{K}}(G_K)$.