Astérisque

ALAIN CONNES

Renormalisation et ambiguïté galoisienne

Astérisque, tome 296 (2004), p. 113-143

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__113_0>

Astérisque
296, 2004, p. 113–143

RENORMALISATION ET AMBIGUÏTÉ GALOISIENNE

par

Alain Connes

Résumé. — Cet article donne un exposé détaillé de mes résultats sur la renormalisation en collaboration avec D. Kreimer. Le premier résultat essentiel est l'identité entre le procédé récursif utilisé par les physiciens pour éliminer les divergences en théorie des champs quantiques et la décomposition de Birkhoff des lacets à valeurs dans un groupe pro-unipotent. Le groupe impliqué dans la renormalisation est celui des difféographismes, construit à partir des graphes de Feynman. Le deuxième résultat important est la construction d'une action de ce groupe des difféographismes sur les constantes de couplage sans dimension de la théorie physique. Le lien précis entre mon travail avec Kreimer et la correspondance de Riemann-Hilbert a été obtenu en collaboration avec M. Marcolli et est explicité à la fin de ce texte. Nous établissons une correspondance de Riemann-Hilbert entre connexions plates équisingulières et représentations d'un groupe de Galois « motivique » explicite U^*. Ce groupe joue dans le contexte de la renormalisation un rôle analogue à celui du tore exponentiel de Jean-Pierre Ramis dans la théorie locale des singularités irrégulières des équations différentielles et il apporte une réponse satisfaisante à la recherche proposée par P. Cartier d'un groupe de Galois « cosmique » qui sous-tend la renormalisation.

***Abstract* (Renormalisation and Galois Ambiguity).** — This paper contains a detailed exposition of my joint work with Kreimer on renormalization. The first key result is the identity between the recursive process used by physicists to remove the divergencies in quantum field theory and the Birkhoff decomposition of loops with values in a pro-unipotent Lie group. The relevant group for renormalization is the group of diffeographisms which is constructed from Feynman graphs. The second key result is the construction of an action of the group of diffeographisms on the dimensionless coupling constants of the theory. The precise link between my work with Kreimer and the Riemann-Hilbert correspondence was obtained in collaboration with M. Marcolli and is explained briefly at the end of the paper. We construct a Riemann-Hilbert correspondence between flat equisingular connections and representations of a specific motivic Galois group U^*. This group is the analogue in renormalization of the exponential torus of Ramis in the local theory of irregular singular differential equations. Our work gives a natural candidate for the "cosmic Galois group"envisaged by Cartier as the symmetry underlying renormalization.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — Primary 58B34 ; Secondary 81T15, 11R32.
Mots clefs. — Renormalisation, Galois, Hopf.

1. Introduction

La renormalisation est sans doute l'un des procédés les plus élaborés pour obtenir des quantités numériques signifiantes à partir d'expressions mathématiques a priori dépourvues de sens. A ce titre, elle est fascinante autant pour le physicien que pour le mathématicien. La profondeur de ses origines en théorie des champs et la précision avec laquelle elle est corroborée par l'expérience en font l'un des joyaux de la physique théorique. Pour le mathématicien épris de sens, mais non corseté par la rigueur, les explications données jusqu'à présent butaient toujours sur le sens conceptuel de la partie proprement calculatoire, celle qui est utilisée par exemple en électrodynamique quantique et ne tombe pas sous la coupe des « théories asymptotiquement libres » auxquelles la théorie constructive peut prétendre avoir donné un statut mathématique satisfaisant. Cet état de fait a changé récemment et cet exposé se propose de donner la signification conceptuelle des calculs effectués par les physiciens dans la théorie de la renormalisation grâce à mon travail sur la renormalisation en collaboration avec Dirk Kreimer et la relation que nous avons établie entre renormalisation et problème de Riemann-Hilbert.

Le résultat clé est l'identité entre le procédé récursif utilisé par les physiciens et les formules mathématiques qui résolvent une application $\gamma : C \mapsto G$ d'un cercle $C \subset S^2$ à valeurs dans un groupe pronilpotent G en un rapport d'applications holomorphes $\gamma_\pm : C_\pm \mapsto G$ des composantes connexes du complémentaire de C dans S^2. La signification géométrique de cette décomposition (de Birkhoff ou Wiener-Hopf) provient directement de la théorie des fibrés holomorphes de groupe structural G sur la sphère de Riemann S^2.

Dans la renormalisation perturbative, les points de la sphère S^2 sont les dimensions complexes parmi lesquelles la dimension D de l'espace-temps est un point privilégié. Le problème étant que dans les théories physiquement intéressantes les quantités à calculer conspirent pour diverger précisément au point D. On peut organiser ces quantités comme élément $g \in G$ d'un groupe pronilpotent G par analogie avec le développement de Taylor d'un difféomorphisme et donner un sens à $g = g(z)$ en remplaçant dans les formules la dimension D par une valeur complexe $z \neq D$. Le procédé de renormalisation acquiert alors la signification suivante : la valeur cherchée $g \in G$ n'est autre que la valeur $g_+(D)$ en D de la partie holomorphe de la décomposition de Riemann-Hilbert $g(z) = g_-^{-1}(z)\, g_+(z)$ du lacet $g(z)$.

La nature exacte du groupe G impliqué dans la renormalisation a été clarifiée par les étapes essentielles suivantes.

La première est la découverte due à Dirk Kreimer de la structure d'algèbre de Hopf secrètement présente dans les formules récursives de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann.

La seconde (qui est le point de départ de notre collaboration) est la similitude entre l'algèbre de Hopf des arbres enracinés de Dirk et une algèbre de Hopf que j'avais introduite avec Henri Moscovici pour organiser les calculs très complexes de géométrie noncommutative. Ceci nous a conduit avec Dirk à définir une algèbre de Hopf directement en termes de graphes de Feynman et à lui appliquer le théorème de Milnor-Moore pour en déduire une algèbre de Lie et un groupe de Lie pronilpotent G, analogue du groupe des difféomorphismes formels.

La troisième étape est l'identification de la recette combinatoire de Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann avec la formule mathématique qui donne, par récurrence, la décomposition de Birkhoff d'un lacet à valeurs dans un groupe de Lie simplement connexe pronilpotent.

Enfin, la dernière étape est la construction d'une action du groupe G sur les constantes de couplage de la théorie physique. Ceci permet de relever le groupe de renormalisation comme un sous-groupe à un paramètre du groupe G et de montrer directement que les développements polaires des divergences sont entièrement déterminés par leur résidu.

En fait, ce groupe G est intimement relié au groupe des difféomorphismes formels des constantes de couplage sans dimension de la théorie physique. L'un des résultats essentiels de notre collaboration avec Dirk est en effet la construction, à partir de la formule qui donne la valeur *effective* d'une telle constante de couplage, d'un homomorphisme de G dans le groupe des difféomorphismes formels tangents à l'identité. Cela éclaire la nature du groupe G qu'il serait naturel d'appeler le groupe de *difféographismes* de la théorie. Cela permet aussi de formuler un corollaire indépendant du groupe G.

Théorème 1.1 **([14])**. — *Considérons la constante de couplage effective non renormalisée $g_{\mathrm{eff}}(\varepsilon)$ comme une série formelle en g et soit $g_{\mathrm{eff}}(\varepsilon) = g_{\mathrm{eff}_+}(\varepsilon)(g_{\mathrm{eff}_-}(\varepsilon))^{-1}$ sa décomposition de Birkhoff (opposée) dans le groupe des difféomorphismes formels. Alors le lacet $g_{\mathrm{eff}_-}(\varepsilon)$ est la constante de couplage nue et $g_{\mathrm{eff}_+}(0)$ la constante de couplage renormalisée.*

Il est naturel d'interpréter en termes galoisiens l'ambiguïté que le groupe de renormalisation introduit dans les théories physiques. La formulation mathématique du groupe de renormalisation comme un sous-groupe à un paramètre du groupe des difféographismes dans la section 5 permet de préciser cette question.

Nous montrerons le rôle que le groupe de renormalisation devrait jouer pour comprendre la composante connexe du groupe des classes d'idèles de la théorie du corps de classe comme un groupe de Galois. Cette idée s'appuie à la fois sur l'analogie entre la théorie des facteurs et la théorie de Brauer pour un corps local et sur la présence implicite en théorie des champs d'un « corps de constantes » plus élaboré que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. En fait, les calculs des physiciens regorgent d'exemples de « constantes » telles les constantes de couplage g des interactions (électromagnétiques, faibles et fortes) qui n'ont de « constantes » que le nom. Elles dépendent, en réalité, du niveau d'énergie μ auquel les expériences sont réalisées et sont des fonctions $g(\mu)$.

de sorte que les physiciens des hautes énergies étendent implicitement le « corps des constantes » avec lequel ils travaillent, passant du corps $\mathbb{C}$ des scalaires à un corps de fonctions $g(\mu)$. Le groupe d'automorphismes de ce corps engendré par $\mu\partial/\partial\mu$ est le groupe d'ambiguïté de la théorie physique.

Je terminerai cet article par un bref exposé de résultats récents obtenus en collaboration avec M. Marcolli ([**17**]) qui établissent enfin un lien précis entre renormalisation et théorie de Galois, en expliquant le rôle de la décomposition de Birkhoff en renormalisation par une correspondance de Riemann-Hilbert entre connexions plates *équisingulières* et représentations d'un *groupe de Galois motivique* explicite U^*. Ce groupe joue dans le contexte de la renormalisation un rôle analogue à celui du tore exponentiel dû à Jean-Pierre Ramis ([**35, 33**]) dans la théorie locale des singularités irrégulières des équations différentielles.

L'apparition naturelle de ce groupe comme enveloppe du groupe de renormalisation, et sa détermination comme produit semi-direct du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ par le groupe pro-unipotent U dont l'algèbre de Lie est l'algèbre libre

$$\mathrm{Lie}(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, \dots),$$

ayant un générateur en chaque degré positif, ouvrent la porte vers des relations très précises entre la théorie des motifs, le groupe de Grothendieck-Teichmuller et la renormalisation, relations suggérées par P. Cartier dans [**4**].

2. Renormalisation, position du problème

2.1. Motivation physique. — L'idée physique de la renormalisation est très claire et remonte aux travaux de Green au dix-neuvième siècle sur l'hydrodynamique. Pour prendre un exemple simple (voir le cours de théorie des champs de Sidney Coleman), si l'on calcule l'accélération initiale d'une balle de ping-pong plongée à quelques mètres sous l'eau, l'on obtient en appliquant la loi de Newton $F = m\,a$ à la poussée d'Archimède $F = (M - m)\,g$, où m est la masse inerte, et M la masse d'eau occupée par la balle, une accélération initiale de l'ordre de $11\,g$! (la balle pèse $m = 2.7$ grammes et a un diamètre de 4 cm de sorte que $M = 33.5$ grammes). En réalité, si l'on réalise l'expérience, l'accélération est de l'ordre de $2g$. En fait, comme le montre Green [**27**] la présence du fluide autour de la balle oblige à corriger la valeur m de la masse inerte dans la loi de Newton et à la remplacer par une « masse effective » qui en l'occurrence vaut $m + \frac{1}{2}\,M$. Dans cet exemple, l'on peut, bien sûr, déterminer la masse nue m en pesant la balle de ping-pong hors de l'eau, mais il n'en va pas de même pour un électron dans le champ électromagnétique, dont il est impossible de l'extraire. De plus, le calcul montre que pour une particule ponctuelle, comme le demande la relativité, la correction qui valait $\frac{1}{2}\,M$ ci-dessus est infinie.