

Astérisque

DANIEL BERTRAND

**Travaux de J.-P. Ramis sur les équations
différentielles linéaires**

Astérisque, tome 296 (2004), p. 11-20

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__11_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__11_0)

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE J.-P. RAMIS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

par

Daniel Bertrand

Résumé. — L'article donne un survol des travaux de J.-P. Ramis sur les singularités irrégulières : théorèmes d'indice Gevrey, dévissage du groupe de Galois analytique, problème inverse.

Abstract (On the work of J.-P. Ramis on linear differential equations). — We survey the work of J.-P. Ramis on irregular singularities, with special emphasis on his Gevrey theorems, his extension of Schlesinger's density theorem, and the analogies his theory provides between analytic differential Galois groups and fundamental groups in positive characteristic.

Plutôt qu'une description linéaire des travaux en question, j'ai choisi ici de dégager trois moments marquants dans les recherches de J.-P. Ramis sur les singularités irrégulières dans le champ complexe : les premiers pas, essentiellement formels, du « dévissage Gevrey » ; l'approche progressive du théorème de densité, menant à la construction du π_1 sauvage ; enfin, la solution de l'analogue différentiel de la conjecture d'Abhyankar. Comme on le verra, cette progression n'est pas le fait du hasard, chaque étape portant en germe les fondements de la suivante.

Je renvoie à l'exposé de J. Sauloy [Sa] au colloque pour les travaux plus récents de Ramis sur les problèmes (tout aussi linéaires) d'équations aux q -différences.

Acte I. Filtrations Gevrey Dijon, 1976 ([R1])

Rappelons tout d'abord le théorème d'indice de Malgrange. Soient $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{z\}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0 et $\widehat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[z]]$ son complété formel pour la valuation z -adique v . Soit, par ailleurs, $L = \sum_{i=0, \dots, n} b_i (d/dz)^i$ un opérateur

Classification mathématique par sujets (2000). — Primary 34A30, Secondary 12H05.

Mots clefs. — Équations différentielles linéaires, singularités irrégulières, théorie de Galois différentielle, groupe fondamental.

différentiel à coefficients dans $\mathcal{O}$. On attache à L son polygone de Newton $\mathcal{N}(L)$ (en 0), enveloppe convexe supérieure des droites d'appui de pentes ≥ 0 des points du plan de coordonnées $(i, v(b_i) - i)$, $i = 0, \dots, n$.

On vérifie facilement que L , vu comme un endomorphisme de $\widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, est surjectif. D'après le théorème de Malgrange, L est de Fredholm, et son indice $\chi(L, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$, qui coïncide donc avec la dimension de son noyau, est égal à la hauteur $(v(b_n) - n) - \inf_{i=0, \dots, n} (v(b_i) - i)$ dont s'élève le polygone de Newton entre les points d'abscisse $i = 0$ et $i = n$. En particulier, $L \in \mathcal{D} = \mathcal{O}[1/z][d/dz]$ vérifie la condition de Fuchs (c'est-à-dire $\mathcal{N}(L)$ est plat) si et seulement si toute extension de $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$ par l'objet trivial $\mathcal{D}/\mathcal{D}d/dz$ qui se trivialise après extension des scalaires à $\widehat{\mathcal{O}}[1/z]$ se trivialise déjà dans $\mathcal{D}$.

Comme l'a montré Deligne, l'irrégularité de Malgrange fournit un analogue différentiel du conducteur de Swan. Il est donc naturel de tenter de l'exprimer au moyen d'une filtration. Celle que propose Ramis dans [R1, R3], consiste à dévisser $\widehat{\mathcal{O}}$ au moyen des espaces de séries Gevrey définis, pour tout nombre réel s , par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{O}}_s &= \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \widehat{\mathcal{O}}, \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n!)^s} z^n \in \mathcal{O} \right\} \\ \widehat{\mathcal{O}}_{(s)} &= \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \widehat{\mathcal{O}}, \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n!)^s} z^n \text{ converge sur } \mathbf{C} \right\}.\end{aligned}$$

Que des conditions Gevrey gouvernent les solutions de L en une singularité irrégulière n'est bien entendu pas une idée nouvelle : il y a tout juste un siècle, Maillet avait remarqué que toute solution formelle d'une équation différentielle algébrique est une série Gevrey, et Perron avait considérablement précisé ce résultat dans le cas linéaire. Ramis montre que les endomorphismes que L induit sur $\widehat{\mathcal{O}}_s$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{(s)}$, $s \geq 0$, sont de Fredholm, et il relie leurs indices aux invariants suivants, récemment introduits dans la théorie par Gérard et Levelt.

Pour tout nombre réel $k \geq 0$, soient $i_k(L)$ et $I_k(L)$ la plus petite et la plus grande des abscisses des points de contacts avec $\mathcal{N}(L)$ de la droite d'appui de pente k . Par exemple, $i_0(L) = 0$, et $I_0(L)$ est le degré du polynôme indicial de L . Les opposées des ordonnées de ces points de contact fournissent, pour $s = 1/k$, les indices recherchés. On en déduit que $\chi(L, \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathcal{O}}_s) = \dim \ker(L, \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathcal{O}}_s)$ est la hauteur dont s'élève le polygone de Newton entre les points d'abscisse $i = 0$ et $i = i_k(L)$. Idem, avec $i = I_k(L)$, pour $\widehat{\mathcal{O}}_{(s)}$.

Je ne déclinerais pas les nombreux corollaires de ce résultat, et renvoie à [LR-P] pour une preuve faisceautique inspirée de Deligne et Malgrange, incluant un raffinement à double précision de la filtration Gevrey, qu'on trouve aussi en théorie des équations aux différences [Du]. Mais revenons à [R1], et à ses dernières pages.

Ramis y remarque qu'en échelonnant suivant l'indice k la transformation de Laplace inverse formelle, la méthode de Borel permet, sous une hypothèse de croissance exponentielle de la transformée le long d'une direction, de sommer les solutions Gevrey de L en de vraies solutions, avec « une assertion d'unicité dans un certain secteur ».

C'est sa première rencontre avec la notion de k -sommabilité, promise, comme on le sait, à un brillant avenir (*cf.* § 2). Comme me l'apprend Malgrange, la sommabilité de Borel ($k = 1$) était réapparue, peu auparavant, dans les travaux de physiciens comme J.-J. Loeffel et A. Sokal. Nul doute que les rencontres de la RCP Maths-Physique de Strasbourg, qu'a longtemps organisées Ramis, ont ici joué un rôle.

Quant au dernier paragraphe de [R1], il résout la moitié d'un problème classique de la théorie des E -fonctions de Siegel. Une E -fonction est une série formelle holonome $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ à coefficients dans un corps de nombres F , dont les images par tout plongement complexe de F appartiennent à $\cap_{\varepsilon > 0} \widehat{\mathcal{O}}_{-1+\varepsilon}$, et telles que les dénominateurs des a_n vérifient une condition du même type. Si $L \in \mathbf{C}(z)[d/dz]$, les résultats de Ramis valent aussi pour les ordres $s < 0$, pour peu qu'on complète le polygone de Newton par la contribution du point ∞ . Ramis en déduit que les images en question appartiennent alors à $\widehat{\mathcal{O}}_{-1}$, et ne sont dans $\widehat{\mathcal{O}}_{(-1)}$ que si f est un polynôme. L'analogue de ce résultat pour les dénominateurs des a_n reste ouvert, mais la notion de « série Gevrey de type arithmétique » à laquelle les travaux de Ramis ont conduit Y. André est devenue centrale en théorie des E -fonctions (voir [A1]).

Pour clore ce chapitre sur le même registre⁽¹⁾, je mentionnerai le dévissage sous-jacent aux théorèmes de Bézivin et Robba [B-R] sur les opérateurs de Polya : on filtre cette fois l'anneau des séries formelles $F[[z]]$ par son sous-espace des fonctions globalement bornées, et par le localisé de $F[z]$ en 0.

Acte II.

(Re)sommation et groupes de Galois différentiels

Les Houches (1979) ([R2]), Rio (1985) ([R4]), Strasbourg (1991)
([Mr-R6])

Comme on l'a vu, on décèle la présence d'une singularité irrégulière par un défaut de convergence. La théorie de Galois différentielle exhibe une autre anomalie : contrairement au cas régulier (théorème de densité de Schlesinger), le groupe de Galois différentiel d'une équation irrégulière n'est en général pas engendré par sa monodromie. Les travaux de Ramis des années 80 conduisent à une magnifique jonction de ces deux thèmes.

Soient K le corps des fractions de $\mathcal{O}$, et $\widehat{K}$ son complété formel. Il sera ici plus commode d'exprimer les résultats en termes d'un système différentiel

$$DY := \frac{d}{dz}Y - BY = 0, \quad B \in gl_n(K)$$

⁽¹⁾Au lecteur qui trouverait ces digressions arithmétiques oiseuses, je dirai qu'elles apparaissent en filigrane dans de nombreux travaux de Ramis. Souvenirs d'un amour de jeunesse ? (Voir [Se], bas de la page 5.)

équivalent sur K à l'équation $Ly = 0$. D'après le théorème de Thomae-Fabry-Poincaré-Hukuhara-Turrittin-Levelt, il existe, après passage à une extension finie de $\widehat{K}$ (que nous supposons triviale dans ce qui suit), une matrice diagonale $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ formée de polynômes en $\frac{1}{z}$ sans termes constants, une matrice constante Λ commutant à Q , et un élément $\widehat{P}$ de $GL_n(\widehat{K})$ tels que $\widehat{P}e^{Qz^\Lambda}$ soit une matrice fondamentale de solutions « formelles » de D . Les degrés des q_i non nuls sont les pentes $k_r > \dots > k_1 > 0$ du polygone de Newton de L , et le nombre de q_i de degré k vaut $I_k(L) - i_k(L)$. Appliquant les résultats du § 1 au système différentiel $\text{Hom}(D, D_0)$, où $D_0 = \frac{d}{dz} - Q' - \frac{1}{z}\Lambda$, on voit que $\widehat{P}$ est constitué de séries Gevrey d'indice $\leq 1/\kappa_1$, où κ_1 est le plus petit des degrés des polynômes $q_i - q_j$ non nuls. L'« extraordinaire » [D1] théorème des développements asymptotiques énonce que, pour tout élément θ du cercle S^1 des directions autour de 0, il existe un germe de secteur U de bissectrice θ , et une matrice P_U holomorphe sur U , y admettant un développement asymptotique égal à $\widehat{P}$, tels que $\mathcal{Y}_U = P_U e^{Qz^\Lambda}$ soit une matrice fondamentale de solutions de D holomorphes sur U . Voir [R5-S] pour une extension de ce théorème au cas non linéaire, et avec des conditions Gevrey.

Notons respectivement $\Sigma(D_0)$ et $\widetilde{\Sigma}(D_0)$ l'ensemble des lignes de Stokes et des directions singulières de $\text{Hom}(D, D_0)$ (ou de $\text{End}(D_0)$, cela revient au même) : ce sont les θ le long desquels, au voisinage de 0, l'un au moins des $e^{q_i - q_j}$ change de comportement asymptotique, ou au contraire admet une décroissance maximale. La formule précédente montre que pour tout secteur ouvert U' tel que $U' - U$ ne rencontre pas $\Sigma(D_0)$, le prolongement analytique à U' de P_U reste asymptotique à $\widehat{P}$. D'où, un recouvrement de S^1 par des ouverts d'angles π/κ_s , $\kappa_s = \max \deg(q_i - q_j)$, sur lesquels D admet des solutions fondamentales du type précédent. Mais cette collection n'est justifiable d'aucune « assertion d'unicité » : de ce fait, les matrices de connexion $C_{i,j} = \mathcal{Y}_{U_j}^{-1} \mathcal{Y}_{U_i} \in GL_n(\mathbf{C})$ qui relient ces solutions à la traversée d'une ligne de Stokes n'ont pas d'interprétation canonique.

C'est la vérification de conditions Gevrey sur les *restes* des développements asymptotiques qui permet à Ramis d'y accéder. Pour tout secteur U , soit $\mathcal{A}_s(U)$ l'anneau des fonctions f holomorphes sur U , y admettant un développement asymptotique dont le n -ième reste est majoré sur U par $r_n |z|^n$, avec $\sum_{n \geq 0} r_n z^n \in \widehat{\mathcal{O}}_s$. Une série formelle $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{O}}_{1/k}$ est dite k -sommable dans la direction θ si elle est développement asymptotique, sur un ouvert U_θ contenant l'arc $[\theta - \frac{\pi}{2k}, \theta + \frac{\pi}{2k}]$, d'une fonction $f \in \mathcal{A}_{1/k}(U_\theta)$, alors unique, qu'on appelle la k -somme canonique $\sigma_\theta(\widehat{f})$ de $\widehat{f}$ le long de θ , et qui se calcule au moyen du procédé de Borel. Ramis introduit dans [R2] le sous-anneau $\mathcal{O}_{1/k} \subset \widehat{\mathcal{O}}_{1/k}$ des *séries k -sommables*, c'est-à-dire, k -sommables dans toute direction sauf un nombre fini, et montre que lorsque $\text{End}(D_0)$ ne présente qu'une pente $\kappa_1 = \kappa_s = k > 0$, les coefficients de la matrice $\widehat{P}$ supra sont k -sommables, d'ensemble de directions exceptionnelles $\widetilde{\Sigma}(D_0)$. D'où, pour toute direction singulière d , deux resommations canoniques $\sigma_{d\pm}(\widehat{P})$ de $\widehat{P}$ le long de directions séparées par d , et une matrice de connexion *naturelle* C_d reliant les solutions $\mathcal{Y}_{d\pm}$ correspondantes.