

# *Astérisque*

DOMINIQUE CERVEAU

**Travaux de J.-P. Ramis sur les équations  
différentielles non linéaires**

*Astérisque*, tome 296 (2004), p. 21-31

[<http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2004\\_\\_296\\_\\_21\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__21_0)

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# TRAVAUX DE J.-P. RAMIS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

*par*

Dominique Cerveau

---

*À Jean et Jean-Pierre*

**Résumé.** — On survole trois articles de J.-P. Ramis traitant de phénomènes non linéaires.

**Abstract (Works of J.-P. Ramis on non-linear differential equations).** — About three papers of J.-P. Ramis related to non linear phenomena.

Ce texte retrace à peu près mot pour mot ma conférence en l'honneur de Jean-Pierre... les plaisanteries (on ne cherchait pas... Hortense... mais Marta) et l'émotion en moins, car nous pensions tous à Jean, enfin tous ceux qui l'ont connu. J'ai choisi délibérément de ne pas parler de tous les travaux de Jean-Pierre concernant le non-linéaire, mais d'en extraire trois thèmes qui, j'espère ne pas me tromper, lui sont chers... L'exposé est plutôt d'aspect informel, plutôt destiné aux étudiants..., pas toujours très précis, mais on pourra consulter les vrais articles, bien sûr...

C'était la fête de Jean-Pierre, alors j'ai oublié beaucoup de monde de par mes choix... ils m'en excuseront.

## 1. Systèmes hamiltoniens (Morales-Ramis)

Dans cette partie, il m'arrive de plagier le remarquable Bourbaki de Michèle Audin sur le sujet (Sém. Bourbaki, Exp. n° 884, mars 2001)... elle ne m'en voudra pas non plus.

On se donne une variété complexe  $M$  de dimension  $2n$  munie d'une forme symplectique disons méromorphe. Le corps  $\mathcal{M}(M)$  des fonctions méromorphes sur  $M$  se

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — Primary 34A34; Secondary 34Mxx.

**Mots clefs.** — Systèmes hamiltoniens, théorie de Galois différentielle, feuilletages holomorphes, perturbations singulières.

laisse munir du crochet de Poisson  $\{, \}$  hérité naturellement du crochet de Lie sur les champs via la correspondance

fonction (ou hamiltonien)  $H \longleftrightarrow$  champ hamiltonien  $X_H$

définie par la formule

$$dH = i_{X_H} \omega.$$

L'exemple le plus simple est  $M = \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$  muni des coordonnées  $(x, y)$  avec  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ . Bien sûr, on a

$$X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'équation qui détermine le flot de  $X_H$  n'est autre que celle de Hamilton.

Le premier exemple cette fois explicite que l'on peut donner est celui correspondant à la description des petits mouvements autour d'une position d'équilibre ; ici

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + \sum \lambda_i x_i^2$$

le premier terme correspondant à l'énergie cinétique (comme toujours  $m = 1!$ ), le second la troncature de l'énergie potentielle en un point critique. On a

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left( 2\lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n X_{H_i}$$

avec  $H_i = y_i^2 + 2\lambda_i x_i^2$  ; comme les  $X_{H_i}$  commutent (les variables sont indépendantes) bien sûr  $\{H_i, H_j\} = 0$ . On découvre ainsi  $n$ -intégrales premières de  $X_H$  :  $X_H(H_i) = 0$ , en involution (c'est la condition de commutation) et indépendantes, aux points génériques, au sens du calcul différentiel. Il se trouve, et c'est un exercice, que  $n$  est le maximum d'intégrales premières comme ci-dessus que l'on puisse espérer.

On dit qu'un système hamiltonien (*i.e.* la donnée de  $H$  ou de  $X_H$ ) est intégrable si l'on peut trouver  $n$ -intégrales premières indépendantes  $H_i$  et en involution ; suivant le contexte les  $H_i$  sont holomorphes, ici méromorphes souvent au voisinage d'une trajectoire particulière ; en réel, *i.e.* lorsque  $M$  est une variété réelle on demande aux  $H_i$  d'être  $C^\infty$  ou analytiques réelles. Justement en réel, lorsque  $M$  est compacte, si  $X_H$  est intégrable les  $X_{H_i}$  sont complets et produisent une action de  $\mathbb{R}^n$  sur  $M$ . Les orbites génériques de cette action sont des tores  $\mathbb{T}^n$  sur lesquels le flot  $X_H$  est équivalent à un flot linéaire, c'est le théorème d'Arnold-Liouville. Bien sûr, en complexe, on perdra ce caractère de complétude dans le cas où  $M$  est non compacte ou bien lorsque les  $X_{H_i}$  sont méromorphes, mais on comprend bien l'enjeu.

Expérimentalement, l'intégrabilité est rare et en tout cas difficile à prouver. Les travaux de Morales-Ramis à la suite de ceux de Ziglin produisent des critères effectifs et efficaces de non intégrabilité. Pour comprendre cela il faut rappeler ce qu'est l'équation aux variations le long d'une solution particulière, concept qui remonte au

moins à Poincaré. Soit  $\Gamma$  une trajectoire de  $X_H$  paramétrée localement par le flot  $t \rightsquigarrow x(t)$ , *i.e.*

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

Si  $Y$  est un champ de vecteurs (local) commutant à  $X = X_H$ , l'écriture explicite de la commutation avec des notations évidentes donne le long de  $\Gamma$  :

$$0 = \sum_1 \left( \sum_k X_k(x(t)) \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}(x(t)) - Y_k(x(t)) \frac{\partial X_i}{\partial x_k}(x(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On reconnaît immédiatement que

$$\frac{\partial}{\partial t}(Y_i(x(t))) - \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k}(x(t)) \cdot Y_k(x(t)) = 0.$$

Ainsi les composantes  $Y_1, \dots, Y_n$  de  $Y$  le long de  $\Gamma$  sont solutions de l'équation linéaire, dite équation variationnelle,

$$(E.V.) \quad \dot{y}(t) = \frac{\partial X}{\partial x}(x(t)) \cdot y(t).$$

Bien sûr, ceci est écrit en coordonnées locales, mais les spécialistes diront que l'on définit ainsi et cette fois globalement une connexion linéaire sur le fibré  $i^*TM$  où  $i$  est l'inclusion de  $\Gamma$  dans  $M$ . Evidemment l'intégrabilité de  $X_H$ , qui se traduit en termes de champs commutants, va donner des propriétés spéciales à  $(E.V.)$ . N'oublions pas que, comme  $X_H$  est méromorphe,  $(E.V.)$  peut présenter en certains points de  $\Gamma$  des singularités régulières ou non, c'est en fait le piment de l'histoire. Voici un certain nombre de faits, certains élémentaires qui vont de façon naturelle nous emmener au résultat.

*Fait 1.* Si  $f$  est intégrale première de  $X_H$  et  $\Gamma$  une trajectoire de  $X_H$  (le long de laquelle  $X_H$  n'est pas complètement singulier), alors la partie initiale de  $f$  le long de  $\Gamma$  :

$$\text{In}_\Gamma f : i^*TM \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui localement s'écrit :

$$Y = (y_1, \dots, y_{2n}) \rightsquigarrow \text{In}_\Gamma f(y_1, \dots, y_{2n})$$

est intégrale première de  $(E.V.)$ . Si  $f$  est holomorphe ;  $\text{In}_\Gamma f$  est essentiellement le premier jet non nul de  $f$  le long de  $\Gamma$  et si  $f = P/Q$  est méromorphe  $\text{In}_\Gamma f = \text{In}_\Gamma P / \text{In}_\Gamma Q$ .

*Fait 2.* — Ce fait est dû à Ziglin dans le cas méromorphe et — comme l'a signalé Alain Chenciner — est connu de Poincaré dans le cas holomorphe. Il dit que si  $f_1, \dots, f_m$  sont des fonctions méromorphes indépendantes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  (*i.e.* si  $df_1 \wedge \dots \wedge df_m \neq 0$ ) alors, il existe des polynômes  $P_i \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_i]$  tels que les  $F_i = P_i(f_1, \dots, f_i)$  aient leurs parties initiales  $\text{In}_0 F_i$  indépendantes.

*Fait 3.* — Il relie le linéaire au non-linéaire, mais, on l'avait deviné dès le discours sur  $(E.V.)$ , le groupe de Galois  $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$  de l'équation linéaire  $(E.V.)$  laisse invariantes les parties initiales  $\text{In}_\Gamma F$  des intégrales premières  $F$  de  $X_H$  (définies au voisinage de  $\Gamma$ ).

*Fait 4.* — qui provient naturellement de la nature symplectique du problème : le groupe  $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$  s'identifie à un sous-groupe du groupe symplectique  $\text{Sp}(T_{x_0}M)$ ,  $x_0 \in \Gamma$  point de base générique.

*Fait 5.* — Si  $g_1, \dots, g_n$  sont des fonctions indépendantes (locales sur  $\mathbb{C}^{2n}$ ) et en involution (relativement au crochet de Poisson standard) et si de plus les  $g_i$  sont annulées par les éléments d'une sous-algèbre de Lie  $\mathcal{L} \subset \mathfrak{sp}(n)$ , alors  $\mathcal{L}$  est abélienne (on voit ici les éléments de  $\mathcal{L}$  comme des dérivations).

Ces cinq faits donnent grosso modo l'idée du théorème de Ramis-Morales (de l'un des...).

**Théorème 1.** — *Soit  $H \in \mathcal{M}(M)$  ; si  $X_H$  est intégrable le long de  $\Gamma$ , courbe intégrale non stationnaire, alors  $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$  est virtuellement abélien (i.e. la composante neutre du groupe algébrique  $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$  est abélienne).*

C'est évidemment le fait 5 qui se passe au niveau des algèbres qui introduit le virtuellement.

Dans le cas où  $(E.V.)$  est de type Fuchs (penser à  $\Gamma$  comme une courbe rationnelle) le groupe de  $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$  est l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie de  $(E.V.)$  ; on retrouve donc dans ce cas un résultat de Ziglin. Mais le critère est beaucoup plus fort ; on peut avoir par exemple  $\Gamma \cong \mathbb{CP}(1)$  et  $(E.V.)$  avec un seul point singulier, irrégulier. Alors la monodromie est bien sûr triviale, alors que  $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$  peut être énorme du fait de la complexité de l'irrégularité : intervention des phénomènes de Stokes, du tore exponentiel (cf. l'exposé de Daniel Bertrand). D'autre part, ce critère se prête bien au calcul effectif, ce qui n'est pas pour déplaire à Jean-Pierre. J'oubliais de mentionner que de nombreux exemples explicites sont maintenant traités (cf. Bourbaki de M. Audin pour une bibliographie et les articles originaux), à la fois par Morales et Ramis et d'autres auteurs.

## 2. Perturbations singulières

Dans cette partie je m'appuie sur l'un des travaux en collaboration avec R. Schäfke de Strasbourg. Il y a beaucoup d'autres articles concernant ce thème... mais comme non spécialiste j'ai choisi de présenter celui qui m'a posé... le moins de difficultés, en espérant, et je pense ne pas trop me tromper, qu'il s'agit bien là de l'un des articles importants.

Poincaré voit les sources de divergence dans les problèmes d'équations différentielles tantôt venant de la présence de « petits diviseurs » (intégration) tantôt de celle de