ERIC URBAN

Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de $GSp_{4/\mathbb{Q}}$

Astérisque, tome 302 (2005), p. 151-176
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__302__151_0>

Astérisque
302, 2005, p. 151–176

SUR LES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ASSOCIÉES AUX REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$

par

Eric Urban

Résumé. — Soit π une représentation cuspidale cohomologique de $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$ qui est non ramifiée en p. Nous démontrons que le polynôme caractéristique de l'automorphisme de Frobenius agissant sur le φ-module filtré de la représentation galoisienne p-adique associée à π s'exprime en termes des paramètres de Langlands de la composante locale de π en p.

Abstract **(On the p-adic Galois representations associated to the cuspidal representations of $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$)**

Let π be a cohomological cuspidal representation of $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$ which is unramified at p. We prove that the characteristic polynomial of the Frobenius automorphism acting on the filtred φ-module of the p-adic Galois representation associated to π is expressed in terms of the Langlands parameters of the local component of π at p.

0. Introduction

Soit $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ une représentation cuspidale de $\mathrm{GSp}_{4\,/\mathbb{Q}}$ dont la composante archimédienne π_∞ appartient à la série discrète. Dans [**W3**] (voir aussi les travaux de Harder et Laumon [**H**], [**L96, L05**]), Weissauer a montré l'existence d'un système compatible de représentations galoisiennes (de rang 4) $\{\rho_{\pi,\ell}\}_\ell$ associé à π au sens que pour tout p tel que π_p soit non ramifiée et différent de ℓ, $\rho_{\pi,\ell}$ est non ramifié en p et le polynôme caractéristique de $\rho_{\pi,\ell}(\mathrm{Frob}_p)$ est donné par

$$Q_{\pi,p}(X) = (X-\alpha_p)(X-\beta_p)(X-\gamma_p)(X-\delta_p)$$

où $(\alpha_p,\beta_p,\gamma_p,\delta_p)$ sont les paramètres de Hecke de π_p. Pour $\ell = p$, on sait par un théorème de Faltings (*cf.* [**F**]) que la restriction de $\rho_{\pi,p}$ à $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ est cristalline. Soit $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,p}) = (V(\rho_{\pi,p}) \otimes B_{\mathrm{cris}})^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ où B_{cris} est l'anneau des périodes

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 11F46, 11F80, 11F85, 14C15, 14C17, 11S37.
Mots clefs. — Représentation galoisiennes p-adiques, représentation cuspidales, formes modulaires de Siegel, motifs.

Ce travail a été partiellement financé par la NSF et le CNRS.

p-adiques de Fontaine. Ce dernier est muni d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et du Frobenius absolu Φ_{cris}. Comme ces actions commutent, on récupère une action linéaire de Φ_{cris} sur $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,p})$. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1. — *Soit p un nombre premier tel que π soit non-ramifiée en p. Alors le polynôme caractéristique de Φ_{cris} agissant sur $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,p})$ est $Q_{\pi,p}(X)$*

Le résultat analogue dans le cas de $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ résulte de la construction du motif associé à π et du théorème de Katz-Messing. Par ailleurs, notre méthode permettrait aussi de retrouver ce résultat sans construire le motif associé. Nous en déduirons les corollaires ci-dessous dans les cas ordinaires. Nous renvoyons le lecteur à [**TU**] et [**U1**] pour les définitions d'ordinarité (pour les représentations automorphes) que nous utilisons dans les énoncés suivants qui sont les généralisations naturelles des définitions classiques. Rappelons toutefois que ordinaire pour le parabolique de Siegel signifie que l'opérateur de Hecke $T(p)$ « classique » opère par une unité p-adique. On note $\mathcal{N}$ le caractère cyclotomique donnant l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur les racines de l'unité une puissance de p.

Corollaire 1. — *Soit π une représentation cuspidale cohomologique de $\mathrm{GSp}_{4\,/\mathbb{Q}}$ de poids cohomologique $(a,b;a+b)$ (cf. paragraphe 3.3) telle que π soit non ramifiée en p.*

(i) *Si π est ordinaire en p pour le sous-groupe parabolique de Siegel alors*

$$\rho_{\pi,p}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\mathcal{N}^{-a-b-3} \end{pmatrix}$$

avec ε_1 et ε_2 des caractères non ramifiés.

(ii) *Si π est stable à l'infini et π est ordinaire pour le sous-groupe parabolique de Klingen, $\rho_{\pi,p}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ stabilise un plan.*

(iii) *Si π est stable à l'infini et π est ordinaire pour le sous-groupe de Borel.*

$$\rho_{\pi,p}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \times & \times & \times \\ 0 & \varepsilon_2\mathcal{N}^{-b-1} & \times & \times \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\mathcal{N}^{-a-2} & \times \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\mathcal{N}^{-a-b-3} \end{pmatrix}$$

avec $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ des caractères non ramifiés.

Remarques

(i) L'importance de la stabilité dans cet énoncé vient du fait qu'elle est équivalente, dans le cas non endoscopique, à l'apparition de tous les poids de Hodge-Tate possibles pour la représentation $\rho_{\pi,p}$; voir paragraphe 1 [**Ta93**] pour ce point. Voir également section 2.3 de [**MT**].

(ii) Si π est ordinaire pour le Borel et π_∞ est générique, à partir des positions respectives des polygones de Hodge et Newton, on voit que tous les poids de Hodge (possibles) doivent intervenir et la représentation est nécessairement stable à l'infini ; lorsqu'elle n'est pas endoscopique.

(iii) Ces résultats sont utilisés dans [**U2**] pour démontrer une première divisibilité vers la conjecture principale pour les représentations modulaires adjointes.

(iv) Par la théorie de [**TU**], on déduit que les représentations galoisiennes associées aux familles de représentations ordinaires de [**TU**] sont ordinaires si au moins une spécialisation de cette famille est stable à l'infini.

Si π est une représentation cuspidale (non cohomologique) dont la composante π_∞ appartient à la limite de la série discrète holomorphe de paramètre de Harish-Chandra sur le mur de la Chambre de Weyl correspondant à la racine longue, Taylor a construit dans [**Ta91**] une représentation galoisienne associée à π et qui se trouve être de dimension 4 grâce aux résultats de Laumon et Weissauer (*cf.* [**U1**]). Comme la construction de Taylor utilise des congruences avec des formes holomorphes cohomologiques, la première partie du Corollaire 1 s'applique aussi à de telles formes. En s'appuyant sur les constructions de [**HST**] et [**Ta94**], on en déduit le corollaire qui suit par les arguments de [**U1**]. Cet énoncé était conjecturé dans *loc. cit.* ce qui en rendait conditionnel le résultat principal.

Corollaire 2. — *Soit σ une représentation cuspidale cohomologique de* $\mathrm{GL}(2)_{/K}$ *pour K un corps imaginaire quadratique sur $\mathbb{Q}$ de caractère central invariant par la conjugaison complexe de K. Soit p un nombre premier décomposé dans $K/\mathbb{Q}$. Alors si σ est ordinaire en une place non ramifié $\wp$ divisant p, la représentation galoisienne p-adique $\varrho_{\sigma,p}$ associée à σ restreinte à un sous-groupe de décomposition en $\wp$ est ordinaire.*

La démonstration du théorème s'articule comme suit. Dans le paragraphe 1, on introduit la catégorie des systèmes compatibles de représentations ℓ-adiques $\mathcal{C}^{S\text{-gr}}$, constituée des systèmes dont tous les sous-quotients ont bonne réduction hors d'un ensemble fini de nombres premiers S avec des polynômes caractéristiques étale et cristallin égaux (cette propriété sera dite de Katz-Messing). Soit X une variété ouverte munie d'une compactification lisse $\overline{X}$ ayant bonne réduction hors de S et de bord ∂X. On montre que tout idempotent de l'algèbre des correspondances sur X (à projections propres) découpe un morceau dans la cohomologie de X vérifiant la propriété de Katz-Messing pourvu que la cohomologie du bord ∂X soit dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. Dans le paragraphe suivant, on vérifie que ce critère est satisfait dans le contexte qui nous intéresse : c'est-à-dire que la cohomologie du bord de la compactification toroïdale du produit fibré de la surface abélienne universelle est un objet de $\mathcal{C}^{S\text{-gr}}$. Au paragraphe 3, on achève la preuve du théorème an appliquant le critère du paragraphe 1 et on prouve les corollaires. En fait, on montre un résultat (voir Théorème 4) sans utiliser le théorème de Weissauer. Ce dernier est utilisé dans [**U2**] pour donner une autre preuve de l'existence de la représentation galoisienne $\rho_{\pi,p}$ de dimension 4 dans le cas ordinaire en utilisant le résultat publié [**L96**] de Laumon lorsque celui de Weissauer ne l'était pas encore. Pour finir, notons que cette méthode permet de montrer des résultats semblables pour les formes cuspidales pour certains groupes unitaires de petit rang $\leqslant 4$.

Je remercie M. Harris de m'avoir signalé une erreur dans une version antérieure de cette note. Je remercie également le rapporteur pour sa lecture attentive du manuscrit.

1. Systèmes compatibles de représentations galoisiennes

1.1. Systèmes. — Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques définitions classiques et introduisons certaines catégories qu'il sera commode d'utiliser tout au long du texte.

Pour tout corps k, on fixe k^{ac} un clôture séparable de k et on pose $G_k = \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ac}}/k)$. Pour tout nombre premier p, on fixe un plongement de $\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}$ dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ac}}$ ce qui permet d'identifier $G_{\mathbb{Q}_p}$ comme un sous-groupe de décomposition en p de $G_{\mathbb{Q}}$ et on note $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q}_p}$ un élément induisant le Frobenius géométrique sur $\mathbb{F}_p^{\mathrm{ac}}$.

Un système de représentations ℓ-adiques de $G_{\mathbb{Q}}$ à coefficients dans un corps E est la donnée d'un E-espace vectoriel $\mathbf{M}$ tel que pour tout nombre premier ℓ, $\mathbf{M}_\ell = \mathbf{M}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell$ est muni d'une action de $G_{\mathbb{Q}}$. Un morphisme f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{M}$, est la donnée d'un morphisme de E-espace vectoriel de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{M}$ tel que pour tout ℓ, $f_\ell = f \otimes 1_{\mathbb{Q}_\ell} : \mathbf{N}_\ell \to \mathbf{M}_\ell$ soit $G_{\mathbb{Q}}$-équivariant. Les systèmes de représentations ℓ-adiques à coefficients dans $E \subset \overline{\mathbb{Q}}$ forment ainsi une catégorie que l'on note $\mathcal{C}_E$.

On définit de manière évidente la somme, le produit tensoriel et le Hom interne dans la catégorie $\mathcal{C}_E$, de même qu'on vérifie trivialement qu'elle est abélienne. On appelle rang et on note $\mathrm{rg}\,\mathbf{M}$ la dimension du E-vectoriel sous-jacent. Pour toute extension E'/E, on a un foncteur d'extension des scalaires évident $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M} \otimes E'$ de $\mathcal{C}_E$ dans $\mathcal{C}_{E'}$.

Définition 1. — Soit $\mathbf{M}$ un objet de $\mathcal{C}_E$ et p un nombre premier, on dit que p est un premier de bonne réduction si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\ell \neq p$, la représentation de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbf{M}_\ell$ est non ramifiée en p.

(ii) La représentation $\mathbf{M}_p$ (restreinte à $G_{\mathbb{Q}_p}$) est cristalline au sens de Fontaine.

Pour tout nombre premier p, soit B_{cris} l'anneau de Fontaine sur $\mathbb{Q}_p$. Rappelons qu'il est muni d'une filtration, d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et d'une action du Frobenius absolu Φ_p qui commute à cette dernière. En particulier ce dernier opère sur

$$D_{\mathrm{cris},p}(\mathbf{M}) = H^0(G_{\mathbb{Q}_p}, B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{M}_p)$$

qui est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathbf{M}$ sur $\mathbb{Q}_p \otimes E$ lorsque $\mathbf{M}$ à bonne réduction en p.