Alain Genestier

Jacques Tilouine

Systèmes de Taylor-Wiles pour GSp_4

Astérisque, tome 302 (2005), p. 177-290

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__302__177_0>

Astérisque
302, 2005, p. 177–290

SYSTÈMES DE TAYLOR-WILES POUR GSp_4

par

Alain Genestier & Jacques Tilouine

Résumé. — Dans cet article, nous mettons en œuvre la méthode des systèmes de Taylor-Wiles dans le cas du groupe GSp_4. Nous démontrons ainsi que certaines représentations galoisiennes symplectiques ρ de rang quatre à valeurs p-adiques, de poids de Hodge-Tate réguliers et p-petits, proviennent de formes modulaires de Siegel cuspidales propres cohomologiques. On doit supposer pour cela un certain nombre d'hypothèses. Elles concernent la modularité de la représentation résiduelle $\overline{\rho} = \rho \pmod p$, la grande taille de son image, le caractère ordinaire ou cristallin de la représentation ρ en p, et, si l'on inclut un conducteur auxiliaire, des conditions de minimalité aux premiers divisant le conducteur, qui généralisent celles introduites par Wiles pour GL_2. Nos hypothèses sont naturelles mais certaines (principalement la modularité résiduelle) semblent difficiles à vérifier.

***Abstract* (Taylor-Wiles systems for GSp_4).** — In this paper, we apply the method of Taylor-Wiles systems in the case of the group GSp_4. We thus show that certain symplectic rank four Galois representations ρ with p-adic values and p-small regular Hodge-Tate weights, do come from cohomological cuspidal Siegel eigenforms. For this purpose, one needs to assume certain assumptions. They deal with the residual modularity of $\overline{\rho} = \rho \pmod p$, the large size of its image, the ordinarity or crystallineness of ρ at p, and, if one includes an auxiliary conductor, some minimality conditions for ρ at primes dividing the conductor, which generalize those introduced by Wiles for GL_2. Our assumptions are natural, but some (mainly the residual modularity) are difficult to verify.

1. Introduction

Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Le but de ce travail est d'établir, sous un certain nombre d'hypothèses, que les représentations galoisiennes $\rho' : \Gamma \to \mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{Z}}_p)$ congrues à une représentation provenant d'une forme modulaire de Siegel cohomologique, proviennent

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F32, 11F46, 11F80, 11G18, 11R34, 11R39.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes, variétés de Siegel, mauvaise réduction, cycles évanescents, niveau parahorique, relations d'Eichler-Shimura, formes modulaires de Siegel.

elles-même de telles formes de Siegel. Notre approche suit de près celle de Harris-Taylor [**24**] elle-même inspirée de [**65**] et [**57**]. Plusieurs étapes de ce travail valent pour le groupe GSp_{2g}, $g \geqslant 2$. Nous essaierons de garder cette généralité dans les sections qui le permettent ; ce sont celles qui (voir Sect. 4) traitent de la cohomologie des variétés de Siegel. Par contre, pour les propriétés locales des représentations galoisiennes et de la cohomologie galoisienne, nous nous limiterons à $g = 2$. Soit $\pi = \pi_N \otimes \pi^N$ une représentation cuspidale cohomologique de $G = \mathrm{GSp}_4$ de niveau N (*i.e.* telle que π^N soit non ramifiée) ; soit p un nombre premier et un plongement $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ On peut associer à π et ι_p une représentation galoisienne p-adique (voir [**33**], [**34**], [**56**] et [**63**]). Plus précisément, il existe un corps p-adique F contenant les valeurs propres des opérateurs de Hecke sur π et un homomorphisme continu

$$\rho_\pi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_4(F)$$

non ramifié hors de Np et tel que pour tout premier ℓ ne divisant pas Np, le polynôme caractéristique du Frobenius géométrique en ℓ est égal au polynôme de Hecke (unitaire et de degré 4) $P_{\pi,\ell}(X) = \det(X \cdot 1_4 - t_{\pi,\ell})$ où $t_{\pi,\ell}$ désigne le paramètre de Hecke de π_ℓ (qui est le produit du paramètre de Satake par $\ell^{3/2}$). Supposons que p ne divise pas N, que $p-1$ soit plus grand que le poids motivique $\boldsymbol{w}_\pi$ de π et que π soit ordinaire en p (on dira aussi, plus correctement, que π_p est ordinaire pour ι_p). Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de F, ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$, k son corps résiduel.

On sait que ρ_π — si elle est semi-simple, *a fortiori*, irréductible — est autoduale à un facteur de similitude près (c'est en effet le cas pour les paramètres de Hecke) ; elle respecte donc, à un scalaire près, une forme bilinéaire non dégénérée ; on conjecture que cette forme est symplectique. Nous aurons besoin dans ce travail d'une hypothèse (RLI_2) de grande image pour la représentation résiduelle $\overline{\rho} = \rho_\pi \pmod{\varpi}$ (Sect. 2.2) ; cette hypothèse entraînera que $\overline{\rho}$ est à valeurs dans $G(k)$ et que ρ_π est à valeurs dans $G(\mathcal{O})$.

La représentation $\overline{\rho}$ est cristalline en p au sens de Fontaine-Laffaille [**15**] ; on la suppose minimale aux places de ramification, et ordinaire en p (voir Section 2). En fait, E. Urban a démontré pour $g = 2$ (voir [**61**]) que la condition d'ordinarité de ρ_π et donc de $\overline{\rho}$ est satisfaite si π_p est ordinaire et π_∞ est stable. Cette dernière condition est remplie pour π (*cf.* Th. 3.4.3 ci-dessous).

Le théorème principal de ce travail (voir Th. 2.2.7) affirme que l'anneau de déformations minimales de $\overline{\rho}$ s'identifie à une algèbre de Hecke localisée en l'idéal maximal associé à π et p et qu'un groupe de cohomologie de la variété de Siegel localisé en ce même idéal maximal est libre sur cette algèbre de Hecke. Pour le montrer, on introduit un système de Taylor-Wiles et on vérifie les conditions posées -indépendamment, par Diamond et Fujiwara. On utilise le résultat principal de [**36**] sur l'absence de torsion de la cohomologie à coefficients dans $\mathcal{O}$, localisée en un idéal maximal non-Eisenstein de l'algèbre de Hecke. Notre construction d'un système de Taylor-Wiles suit de près celle de [**24**]. Cependant plusieurs différences substantielles sont à noter. D'abord, dans notre cas comme dans le travail original de Wiles [**65**], les variétés de Shimura considérées ne sont pas propres. Les cas traités dans [**24**] concernent des variétés de Shimura propres. Les difficultés causées par le bord sont résolues dans la section 7 de la manière suivante. Le problème de changement de base pour les cycles proches est en fait local : il s'agit de montrer qu'un morphisme de complexes de faisceaux est un quasi-isomorphisme. On utilise alors un Théorème de Berkovich pour se ramener à des schémas formels et on généralise la description des cartes formelles de la compactification toroïdale arithmétique de [**13**] de la variété de Siegel du cas de bonne réduction au cas de mauvaise réduction pour le parahorique de Klingen Π. Un lemme dont la preuve nous a été communiquée par G. Laumon permet alors de conclure.

Une autre différence tient au choix du niveau auxiliaire. Dans le présent travail, il est essentiellement de nature parahorique (à l'exception du cas S_1 si p ne divise pas $\ell^4 - 1$), voir Sect. 2.2.

La vérification des propriétés locales de la représentation galoisienne « modulaire universelle » en chaque nombre premier de Taylor-Wiles q occupe une grande partie de ce travail (Sect. 6-9). Suivant l'approche de [**25**], elle repose sur une « relation d'Eichler-Shimura » qui décrit l'action du groupe de décomposition D_q en q sur la χ-partie $H^{\bullet,\langle\rangle=\chi}$ de la cohomologie de la variété de Siegel $X_1(q)$ de niveau q (de type parahorique de Klingen), pour tout caractère non trivial $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ et où $\langle a\rangle$ désigne l'opérateur diamant de $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Plus précisément, on a $H^{\bullet,\langle\rangle=\chi} = H_e \oplus H_m$ où H_e et H_m sont des espaces stables par D_q donnés par la cohomologie des composantes irréductibles X^e et X^m de la fibre spéciale de la mauvaise réduction de $X_1(q)$ (*cf.* Prop. 7.2.2). L'action du sous-groupe d'inertie I_q est triviale sur H_e et donnée par χ sur H_m. La relation d'Eichler-Shimura s'énonce alors : $P_q^e(\mathrm{Fr}_q) = 0$ sur H_e, et $P_q^m(\mathrm{Fr}_q) = 0$ sur $\chi^{-1} \otimes H_m$. Les polynômes P_q^e et P_q^m se définissent à l'aide de « transformations de Satake parahoriques » (voir section 3).

Les calculs de cohomologie galoisienne locale et globale (Section 10), dont le but est de vérifier les conditions de contrôle (CR) et (CG) de Sect. 5.1, doivent être modifiés pour tenir compte de l'autodualité symplectique.

La condition de contrôle des modules M_Q avec action fidèle des algèbres de Hecke est vérifiée dans la Section 11. L'argument (Prop. 11.1.2) utilise de façon essentielle l'absence de torsion démontrée dans [**36**] et les calculs algébriques sur les algèbres de Hecke parahoriques établis dans la Section 3.

Nous donnons dans la Section 12 une application de notre résultat au calcul de l'ordre du groupe de Selmer de la représentation adjointe d'une forme de Siegel f propre nouvelle (au sens de [**49**]) de multiplicité un, en termes de produits de Petersson et d'une période, dans l'esprit d'une formule de Bloch-Kato pour ce motif. Le lien explicite avec une telle formule reste cependant à préciser (voir Sect. 12, remarque finale). Des calculs de Yoshida [**68**] et un travail récent d'Ichino [**29**] prédisent la forme de la période de Deligne pour la valeur critique en $s = 1$ de la fonction L du motif adjoint de f en termes du carré de Petersson d'une forme non holomorphe f^{Whitt} de même système de valeurs propres de Hecke que f. Ceci fournit un lien conjectural entre les périodes que nous obtenons et les carrés de Petersson pour f et f^{Whitt}.

D'autre part, notre théorème fournit un outil qui devrait permettre de répondre dans certains cas — sous l'hypothèse que pour un certain nombre premier p, la représentation galoisienne p-adique de ce motif est congrue modulo p à celle d'une forme de Siegel — à la question (formulée en termes un peu vagues) : un motif défini sur $\mathbb{Q}$ symplectique de rang 4 de type de Hodge adéquat provient-il d'une forme de Siegel de genre 2 ?

L'un de nous reviendra sur ces applications dans un travail ultérieur.

Les auteurs souhaitent témoigner leur reconnaissance à M. Harris et R. Taylor qui leur ont généreusement communiqué leur preprint [**24**], ainsi qu'à G. Laumon qui a fourni la démonstration du Lemme 7.1.4. Des échanges avec A. Abbès, M. Dimitrov, H. Hida, A. Mokrane et F. Oort ont également été très utiles. Le premier auteur remercie l'IHES, où il a séjourné deux ans pendant lesquels une partie appréciable de sa contribution a été rédigée, ainsi que le Fields Institute et le TIFR. Le second auteur remercie les Universités de Muenster, Rome Tor Vergata, UCLA et le Harish-Chandra Institute. Tous deux ont apprécié les excellentes conditions de travail dont ils ont bénéficié dans ces institutions.

Enfin, la lecture détaillée et critique du texte par le rapporteur a été fort utile; nous l'en remercions. Les erreurs et obscurités restantes sont bien sûr de la seule responsabilité des auteurs.

Table des matières