Astérisque

GÉRARD LAUMON

Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois

Astérisque, tome 302 (2005), p. 1-66

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__302__1_0>

Astérisque
302, 2005, p. 1–66

FONCTIONS ZÊTAS DES VARIÉTÉS DE SIEGEL DE DIMENSION TROIS

par

Gérard Laumon

Résumé. — Ces notes reprennent pour l'essentiel le contenu de mon article « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ », en y remplacant partout le système de coefficients constant par un système de coefficients arbitraire.

***Abstract* (Zeta functions of Siegel threefolds).** — In these notes I extend the results of my paper "Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$" to the case of an arbitrary system of coefficients.

Ces notes reprennent pour l'essentiel le contenu de mon article « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ » [**0**], en y remplacant partout le système de coefficients constant par un système de coefficients arbitraire. Le résultat principal (24.1) est une expression spectrale pour la cohomologie à supports compacts des variétés de Siegel de dimension 3 à valeurs dans un tel système de coefficients, cette cohomologie étant considérée comme un module sur le produit de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ et du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ce résultat dépend du « Lemme fondamental », plus précisément des hypothèses 15.1, 16.1 et 19.2. Ces hypothèses résultent probablement des travaux de Hales [**Ha3**], [**Ha4**] et Waldspurger [**5**], mais faute de référence précise je ne peux l'affirmer. Elles résultent aussi en grande partie de travaux non publiés de Schröder et Weissauer [**6**] (par exemple, dans les prépublications « A special case of the fundamental lemma I, II, III and IV » incluses dans [**6**], Weissauer démontre l'hypothèse 15.1 dans le cas où γ_H *est régulier dans* H *et la caractéristique résiduelle est différente de* 2, en utilisant les résultats de la thèse de Schröder).

Des résultats similaires aux nôtres, voire plus complets, ont été obtenus par Harder [**Har**] et Weissauer [**6**].

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F46, 14F20, 14G10, 22E55.
Mots clefs. — Fontions zétas, formule des traces d'Arthur-Selberg, variétés de Shimura.

J'utilise librement la bibliographie de [**0**] (et sa numérotation). Quelques références plus récentes ([**1**] à [**6**]) ont été ajoutées à la fin de ces notes.

Je remercie les organisateurs du Semestre Borel 2000 sur les formes automorphes de me permettre de publier ces notes. Je remercie aussi les organisateurs de la Conférence sur les formes automorphes à l'IAS de Princeton en avril 2001 de m'avoir donné l'occasion de faire un exposé sur ce sujet.

PARTIE I
LA GÉOMÉTRIE

1. Le groupe algébrique $\mathrm{GSp}(4)$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n la matrice identité de taille $n \times n$.

Pour tout anneau (commutatif unitaire) R, on désigne par un indice R l'extension des scalaires à R.

On considère le $\mathbb{Z}$-module libre $V = \mathbb{Z}^4$ et la forme alternée non dégénérée qui est définie par

$$(v, w) = v_1 w_4 + v_2 w_3 - v_3 w_2 - v_4 w_1, \ \forall\, v, w \in V.$$

et qui a pour matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de V où $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

On munit l'anneau $C = \mathrm{gl}(4, \mathbb{Z})$ des matrices 4×4 à coefficients entiers de l'involution $* : C \to C$ qui est induite par cette forme alternée et qui est donc donnée par

$$x^* = J\,{}^{\mathrm{t}}x J^{-1}.$$

On note $G = \mathrm{GSp}(4)$ le schéma en groupes défini par

$$\begin{aligned} G(R) &= \{x \in C_R \mid \exists\ c(x) \in R^\times \ \text{ tel que } x^* x = c(x) I_4\} \\ &= \{x \in \mathrm{GL}(4, R) \mid \exists\ c(x) \in R^\times \ \text{ tel que } {}^{\mathrm{t}}x J x = c(x) J\} \end{aligned}$$

pour tout anneau R. Le multiplicateur $c : G \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est un caractère algébrique dont le noyau est le schéma en groupes $G_1 = \mathrm{Sp}(4)$.

Si on écrit $x = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{gl}(4, R)$ par blocs de taille 2×2, la relation ${}^{\mathrm{t}}x J x = c(x) J$ équivaut aux relations

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}ASC = {}^{\mathrm{t}}CSA, \\ {}^{\mathrm{t}}BSD = {}^{\mathrm{t}}DSB, \\ {}^{\mathrm{t}}ASD - {}^{\mathrm{t}}CSB = c(x) S. \end{cases}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{gsp}(4)$ de G est la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{gl}(4)$ formée des $x \in \mathrm{gl}(4)$ pour lesquels il existe un scalaire $c'(x)$ tel que

$$^{\mathrm{t}}xJ + Jx = c'(x)J,$$

c'est-à-dire tel que

$$^{\mathrm{t}}CS = SC,\ ^{\mathrm{t}}BS = SB \quad \text{et} \quad ^{\mathrm{t}}AS + SD = c'(x)S$$

si on écrit $x = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ par blocs de taille 2×2. La forme linéaire $c' : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ est bien sûr la dérivée à l'origine du caractère algébrique c et son noyau est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{sp}(4)$ de G_1.

Les schémas en groupes G_1 et G sont de dimension 10 et 11 respectivement.

2. Le demi-plan de Siegel

Soit $h : \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \to C_{\mathbb{R}}$ l'homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres (unitaires) défini par

$$h(i) = J^{-1} = -J.$$

C'est un $*$-homomorphisme : on a $h(z)^* = h(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $(v, h(i)w) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$ sur $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$ est à valeurs réelles et est symétrique et définie positive.

On note simplement h^{-1} l'inverse de la restriction de h à $\mathbb{C}^\times$ vue comme homomorphisme de $\mathbb{R}$-schémas en groupes de la restriction à la Weil $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}})$ dans $G_{\mathbb{R}}$. On peut décomposer $(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}))_{\mathbb{C}}$ en un produit de deux copies de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}$ indexées par les deux homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans lui-même (l'identité et la conjugaison complexe). On note $\mu_h : \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ la restriction de $(h^{-1})_{\mathbb{C}}$ au facteur correspondant à l'identité de $\mathbb{C}$. Concrètement, on a

$$\mu_h(z) = \begin{pmatrix} \frac{z+1}{2} & & & i\frac{z-1}{2} \\ & \frac{z+1}{2} & i\frac{z-1}{2} & \\ & -i\frac{z-1}{2} & \frac{z+1}{2} & \\ -i\frac{z-1}{2} & & & \frac{z+1}{2} \end{pmatrix} = I_G \begin{pmatrix} z & & & \\ & z & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} I_G^{-1}$$

où

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \\ & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Lemme 2.1. — *Le couple (G, h^{-1}) vérifie les conditions de Deligne-Shimura suivantes :*

(1) *L'image par h^{-1} du sous-groupe « diagonal » $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{R}} \subset \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}})$ est centrale dans $G_{\mathbb{R}}$.*

(2) *Considérons l'action de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui est composée du cocaractère μ_h et de l'action adjointe de $G_{\mathbb{C}}$. Ses poids dans $X^*(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}$ sont -1 avec multiplicité 3, 0 avec multiplicité 5 et 1 avec multiplicité 3.*

(3) *La forme réelle de $G_{1,\mathbb{R}}$ obtenue en tordant $G_{1,\mathbb{R}}$ par l'automorphisme intérieur de conjugaison par $h^{-1}(i)$ est compacte. En d'autres termes, le sous-groupe*

$$\{x \in C_{\mathbb{C}} \mid x^*x = I_4 \quad et \quad h^{-1}(i)\overline{x}h(i) = x\} \subset G_1(\mathbb{C})$$

est compact.

Démonstration. — La condition (1) est triviale.

La condition (2) résulte de la remarque suivante : on a $I_G J I_G^{-1} = J$ et donc, pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$, l'action adjointe de $\mu_h(z)$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à l'action par conjugaison de la matrice diagonale $\mathrm{diag}(z, z, 1, 1)$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Les espaces propres pour cette dernière action sont

$$\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid {}^{\mathrm{t}}CS = SC\} \text{ pour le poids } -1,$$

$$\{\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) \mid {}^{\mathrm{t}}AS + SD \in \mathbb{C}S\} \text{ pour le poids } 0$$

et

$$\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid {}^{\mathrm{t}}BS = SB\} \text{ pour le poids } 1.$$

Enfin, si on note $\mathrm{U}(4,\mathbb{R})$ est le groupe unitaire compact $\{x \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}\overline{x}x = I_4\}$, l'égalité

$$\{x \in C_{\mathbb{C}} \mid x^*x = I_4 \quad \text{et} \quad h^{-1}(i)\overline{x}h(i) = x\} = \{x \in \mathrm{U}(4,\mathbb{R}) \mid J\overline{x} = xJ\},$$

entraîne la condition (3). □

Le groupe de Lie réel $G(\mathbb{R})$ agit par conjugaison sur l'espace des $*$-homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{C} \to C_{\mathbb{R}}$. Le fixateur de h pour cette action est le sous-groupe

$$K'_\infty = \{x \in G(\mathbb{R}) \mid Jx = xJ\}$$

et la $G(\mathbb{R})$-orbite X_∞ de h est donc isomorphe à $G(\mathbb{R})/K'_\infty$.

Le groupe K'_∞ est compact modulo son centre. Plus précisément, on a

$$K'_\infty = \mathbb{R}_+^\times K_\infty \subset G(\mathbb{R})$$

où

$$K_\infty = \{x \in G(\mathbb{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}xx = I_4\}$$

est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$. Ce dernier sous-groupe admet deux composantes connexes découpées par les deux valeurs possibles ± 1 du multiplicateur c sur K_∞.

Lemme 2.2. — *La composante neutre $K_{1,\infty} \subset G_1(\mathbb{R})$ de K_∞ est isomorphe au groupe unitaire*

$$U(2,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}\overline{g}g = I_2\}.$$