Astérisque

PIERRE COLMEZ

**Espaces vectoriels de dimension finie et
représentations de de Rham**

Astérisque, tome 319 (2008), p. 117-186

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__117_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE ET REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM

par

Pierre Colmez

Résumé. — La conjecture de monodromie p -adique de Fontaine « de Rham implique potentiellement semi-stable » est maintenant un théorème : Berger a montré comment associer à une représentation de de Rham un module différentiel avec structure de Frobenius sur l’anneau de Robba, ce qui permet de ramener cette conjecture à la conjecture de monodromie de Crew qui a ensuite été démontrée par André, Mebkhout et Kedlaya de manière indépendante. Dans cet article, nous donnons une nouvelle démonstration de la conjecture de Fontaine ne s’appuyant pas sur la théorie des équations différentielles p -adiques.

Abstract (Finite-dimensional vector spaces and de Rham representations). — The p -adic monodromy conjecture of Fontaine “de Rham implies potentially semi-stable” is now a theorem : Berger showed how to attach to a de Rham representation a differential module with a Frobenius structure over the Robba ring, which reduced Fontaine’s conjecture to Crew’s monodromy conjecture proved afterwards, independently by André, Mebkhout and Kedlaya. In this paper, we give a new proof of Fontaine’s conjecture which bypasses the theory of p -adic differential equations.

Introduction

0.1. Notations. — Soient k_F un corps parfait de caractéristique p , $\mathcal{O}_F = W(k_F)$ l’anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F et $F = \mathcal{O}_F[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_F$, ce qui fait de F un corps complet pour la valuation p -adique v_p (que l’on suppose normalisée par $v_p(p) = 1$), d’anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ et de corps résiduel k_F .

On se fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F . La valuation v_p s’étend de manière unique à $\overline{F}$ et on note C le complété de $\overline{F}$ pour la valuation v_p . Si $K \subset \overline{F}$ est une extension algébrique de F , on note $\mathcal{O}_K$ l’anneau des entiers de K et k_K son corps résiduel.

Classification mathématique par sujets (2000). — 11S.

Mots clefs. — p -adique, Banach, représentations, semi-stable, anneaux de Fontaine.

On se fixe aussi un système $(\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\overline{F}$ vérifiant $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$. Ceci fait de $\varepsilon^{(n)}$ une racine primitive p^n -ième de l'unité.

Si K est une extension finie de F , on note K_n le corps $K(\varepsilon^{(n)})$ et K_∞ l'extension cyclotomique de K réunion des K_n . On note $\mathcal{G}_K$ le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{F}/K)$ et $\chi : \mathcal{G}_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Soit aussi $\mathcal{H}_K$ le noyau de la restriction de χ à $\mathcal{G}_K$ de telle sorte que $\mathcal{H}_K = \text{Gal}(\overline{F}/K_\infty)$ et soit $\Gamma_K = \mathcal{G}_K/\mathcal{H}_K = \text{Gal}(K_\infty/K)$. Alors χ se factorise à travers Γ_K et l'image de Γ_K par χ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$.

0.2. La conjecture de monodromie p -adique de Fontaine. — Soit K une extension finie de F et soit V une $\mathbf{Q}_p$ -représentation de dimension d de $\mathcal{G}_K$, c'est-à-dire un $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension d muni d'un morphisme continu de groupes de $\mathcal{G}_K$ dans $\text{GL}(V)$. Soient $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+ \subset \mathbf{B}_{\text{st}}^+ \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ les anneaux introduits par Fontaine [14, 15, 17] pour classifier les $\mathbf{Q}_p$ -représentations de $\mathcal{G}_K$ venant de la géométrie, et soit $t \in \mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ le « $2i\pi$ p -adique de Fontaine ». Rappelons que V est de de Rham si $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\frac{1}{t}])^d$ en tant que $\mathcal{G}_K$ -module, ce qui équivaut à ce que le K -espace vectoriel $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}$ soit de dimension d . De même, V est *semi-stable* si $\mathbf{B}_{\text{st}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\text{st}}^+[\frac{1}{t}])^d$ en tant que $\mathcal{G}_K$ -module. Une représentation semi-stable est *a fortiori* de de Rham ; réciproquement, une représentation de de Rham est semi-stable si et seulement si $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ possède une base sur K constituée d'éléments de $\mathbf{B}_{\text{st}}^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. On dit que V est *potentiellement semi-stable* s'il existe une extension finie L de K telle que V soit semi-stable en tant que $\mathbf{Q}_p$ -représentation de $\mathcal{G}_L$. Une représentation potentiellement semi-stable est de de Rham (car $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ contient $\overline{F}$) et notre but, dans cet article, est de donner une nouvelle démonstration du résultat suivant qui avait été conjecturé par Fontaine [18].

Théorème 0.1. — *Toute représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$ est potentiellement semi-stable.*

Les démonstrations existantes⁽¹⁾ de ce théorème passent par la théorie des équations différentielles p -adiques. En utilisant la théorie des (φ, Γ) -modules [16, 6], Berger [4] a associé à une représentation de de Rham V un module différentiel $\mathbf{N}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ avec structure de Frobenius sur l'anneau de Robba et a montré que V était semi-stable si et seulement si ce module était quasi-unipotent, réduisant ainsi la conjecture de Fontaine à la conjecture de monodromie p -adique de Crew [13]. La conjecture de Crew a ensuite été démontrée de manière indépendante par André [1], par Mebkhout [25] et par Kedlaya [24] ; je renvoie à [10] pour plus de détails. Des trois démonstrations

⁽¹⁾ Depuis la première version de cet article, Fontaine [20] a fabriqué une autre démonstration évitant le recours à la théorie des équations différentielles p -adiques ; un de ses ingrédients n'est pas sans rappeler les techniques du n° 3.3 de cet article.

de la conjecture de Crew à notre disposition, celle de Kedlaya est celle qui utilise le moins la théorie des équations différentielles p -adiques : elle repose à la place sur une classification à la Dieudonné-Manin des φ -modules sur l'anneau de Robba, ce qui lui permet par dévissage de se ramener au cas d'un module isocline traité par Tsuzuki [29, 8].

0.3. Principe de la démonstration. — Notre démonstration de la conjecture de Fontaine est parallèle à celle obtenue en combinant les travaux de Berger et Kedlaya, mais évite complètement la théorie des (φ, Γ) -modules et celle des équations différentielles p -adiques (il reste quand-même un fantôme de ces théories dans la démonstration de certains points). Elle a été obtenue en deux temps. Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, le seul point où la théorie des équations différentielles p -adiques est utilisée dans les travaux de Kedlaya est à travers le théorème de Tsuzuki. Or celui-ci admet un équivalent (prop. 0.2 ci-dessous), dû à Sen [26], dans la théorie des représentations galoisiennes (cf. [4, n° 5.6] pour l'équivalence des résultats de Sen et de Tsuzuki) ; avec ce fait en tête, il n'est pas très difficile de fabriquer une démonstration de la conjecture de Fontaine ne faisant pas référence aux équations différentielles p -adiques, en faisant du mécano avec les arguments de Berger et Kedlaya (c'est cette démonstration qui apparaît en filigrane dans cette introduction). Par la suite, des questions provenant de la théorie des déformations de représentations galoisiennes [5] nous ont amené à essayer de rendre les ingrédients de la démonstration les plus directs possibles (et à expliciter comment les constantes se comportent dans une famille) dans l'espoir que ceux-ci s'adaptent à une démonstration « en famille ».

Nous remplaçons le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya par un résultat analogue (cf. prop 0.3) pour certains φ -modules sur l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)$, et utilisons cette décomposition pour une variante $\widetilde{\mathbf{N}}_{\text{rig}}^+(V)$ du module $\mathbf{N}_{\text{rig}}^+(V)$ de Berger. Le théorème de Tsuzuki est remplacé par le résultat suivant de Sen [26] (bien antérieur à la définition de représentation semi-stable!), selon lequel une représentation de Rham dont les poids de Hodge-Tate sont nuls (ce qui se traduit par l'existence d'un isomorphisme de $\mathcal{G}_K$ -modules de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^d$) est potentiellement non ramifiée et donc, *a fortiori*, potentiellement semi-stable.

Proposition 0.2. — *Si V est une représentation de Hodge-Tate de $\mathcal{G}_K$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'inertie de $\mathcal{G}_K$ agit à travers un quotient fini ;*
- (ii) *les poids de Hodge-Tate de V sont tous nuls.*

Le dévissage permettant de se ramener au cas « isocline » est un peu plus délicat que dans le cas des équations différentielles p -adiques, et repose sur des calculs de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine et, plus précisément (cf. prop. 0.4

ci-dessous) sur un énoncé du type « $H_g^1 = H_{st}^1$ » pour les $\mathcal{G}_K$ -modules

$$U_{h,a} = (\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi^h = p^a} \quad \text{et} \quad U'_{h,a} = (\mathbf{B}_{\text{st}}^+)^{\varphi^h = p^a}.$$

Les méthodes pour faire ces calculs, bien que relativement techniques, sont parfaitement huilées : elle remontent à l'article fondateur de Tate [28].

Signalons que Fontaine avait démontré [19] le théorème 0.1 ci-dessus (avant qu'il ne soit démontré en toute généralité) pour les représentations de dimension 2, par une méthode qui rappelle un peu celle décrite ci-dessus.

L'analogie du théorème de Dieudonné-Manin auquel il a été fait allusion plus haut est le suivant

Proposition 0.3. — *Soit M un sous- $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -réseau de $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^d$ et soit $M_{\text{rig}} = \{x \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+)^d, \varphi^n(x) \in M, \text{ quel que soit } n \in \mathbf{Z}\}$. Alors M_{rig} est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ -module libre de rang d , et il existe une base $e_1, \dots, e_d$ de M_{rig} sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ vérifiant :*

- (i) *il existe $h \in \mathbf{N}$ et $a_1 \leq \dots \leq a_d \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$ si $1 \leq i \leq d$;*
- (ii) *$\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$ est une base de M sur $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Rappelons que l'on obtient $\mathbf{B}_{\text{st}}^+$ à partir de $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ en lui adjoignant un analogue p -adique u de $\log p$. On a alors $\mathbf{B}_{\text{st}}^+ = \mathbf{B}_{\text{cris}}^+[u]$, et la dérivation $N = -\frac{d}{du} : \mathbf{B}_{\text{st}}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{st}}^+$ commute à l'action de $\mathcal{G}_K$. Le résultat du type « $H_g^1 = H_{st}^1$ » auquel il a été fait allusion ci-dessus est alors le suivant. (Le corps E_h apparaissant dans l'énoncé est l'extension non ramifiée de degré h de $\mathbf{Q}_p$.)

Proposition 0.4. — *Soient a et h des entiers ≥ 1 .*

- (i) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $U_{h,a}$ tel que $\sigma \mapsto \varphi^{-n}(c_\sigma)$ soit un cobord dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors, si $a \neq h$ (resp. si $a = h$), il existe $c \in U_{h,a}$ (resp. $c \in E_h^{\mathcal{G}_K} u + U_{h,a}$) tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_K$.*
- (ii) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle continu à valeurs dans $U'_{h,a}$ tel que $\sigma \mapsto N^k(\varphi^{-n}(c_\sigma))$ soit un cobord dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, pour tous $k, n \in \mathbf{N}$. Alors il existe $c \in U'_{h,a}$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_K$.*

0.4. Démonstration de la conjecture de Fontaine. — Nous renvoyons aux n° 0.5 et n° 0.6 pour des commentaires sur la démonstration des propositions 0.3 et 0.4; nous allons maintenant montrer comment on peut en déduire la conjecture de monodromie de Fontaine. (L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+$ apparaissant ci-dessous est défini par $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+ = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{st}}^+)$; on a aussi $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[u]$, et on aurait pu définir les $\mathcal{G}_K$ -modules $U_{h,a}$ et $U'_{h,a}$ par $U_{h,a} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+)^{\varphi^h = p^a}$ et $U'_{h,a} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+)^{\varphi^h = p^a}$.)

Soit V une représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$, de dimension d , à poids de Hodge-Tate ≤ 0 (on peut s'y ramener en tordant par une puissance convenable du caractère cyclotomique). Soit $\mathbf{N}_{\text{dR}}^+(V) = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$; l'hypothèse selon laquelle les