Astérisque

LAURENT BERGER

Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés

Astérisque, tome 319 (2008), p. 13-38
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__13_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
319, 2008, p. 13–38

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES ET (φ, N)-MODULES FILTRÉS

par

Laurent Berger

Résumé. — L'objet de cet article est de montrer que les deux catégories suivantes sont équivalentes (1) la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés (2) la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de Γ_K agit localement trivialement.

De plus, on montre que sous cette équivalence, les (φ, N, G_K)-modules filtrés admissibles correspondent aux (φ, Γ_K)-modules étales, ce qui nous permet de donner une nouvelle démonstration du théorème de Colmez-Fontaine.

Abstract **(p-adic differential equations and filtered (φ, N)-modules).** — The goal of this article is to show that the following two categories are equivalent (1) the category of filtered (φ, N, G_K)-modules (2) the category of (φ, Γ_K)-modules over the Robba ring such that the Lie algebra of Γ_K acts locally trivially.

Furthermore, we show that under this equivalence, the admissible filtered (φ, N, G_K)-modules correspond to the étale (φ, Γ_K)-modules, which gives a new proof of Colmez-Fontaine's theorem.

Introduction

Dans tout cet article, K est un corps local qui contient $\mathbf{Q}_p$ et qui est muni d'une valuation discrète étendant la valuation p-adique et pour laquelle K est complet et de corps résiduel parfait k_K. Pour $n \leqslant \infty$, on pose $K_n = K(\mu_{p^n})$ et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

(φ, N, G_K)-modules filtrés et (φ, Γ_K)-modules. — L'objet de cet article est de construire une équivalence de catégories entre deux catégories utilisées dans la théorie des représentations p-adiques et des équations différentielles p-adiques (on se reportera au chapitre I pour des rappels sur ces catégories). Il s'agit de :

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 12H25, 13K05, 14F30.
Mots clefs. — Représentations p-adiques, (φ, N)-modules filtrés, équations différentielles p-adiques, (φ, Γ)-modules.

© Astérisque 319, SMF 2008

1. la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, dont la sous-catégorie des objets admissibles paramétrise les représentations p-adiques potentiellement semi-stables du groupe de Galois absolu G_K du corps K ;
2. la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de Γ_K agit localement trivialement, qui généralise la notion d'équation différentielle p-adique munie d'une structure de Frobenius.

On construit un foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ qui à un (φ, N, G_K)-module filtré D associe un (φ, Γ_K)-module $\mathscr{M}(D)$ sur l'anneau de Robba $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème A. — *Le $\otimes$-foncteur exact $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, dans la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

Étant donné un (φ, N, G_K)-module filtré D, le (φ, Γ_K)-module $\mathscr{M}(D)$ admet (par le théorème [**19**, théorème 6.10] de Kedlaya) une filtration canonique par les « pentes de Frobenius ». Nous calculons ces pentes en terme des invariants t_H et t_N de D et de ses sous-objets. Comme corollaire de ces calculs, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème B. — *Le (φ, N, G_K)-module filtré D est admissible si et seulement si $\mathscr{M}(D)$ est étale.*

Application aux représentations p-adiques. — Comme application du théorème B, on obtient une nouvelle démonstration du théorème [**12**, théorème A] de Colmez-Fontaine :

Théorème. — *Si D est un (φ, N, G_K)-module filtré admissible, alors il existe une représentation p-adique V potentiellement semi-stable telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = D$.*

Enfin, les constructions précédentes nous permettent de préciser les liens entre les divers invariants que l'on peut associer à une représentation p-adique potentiellement semi-stable V (qui devient semi-stable sur une extension galoisienne finie L de K). Ces invariants sont :

1. le $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$;
2. l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$;
3. le (φ, Γ_K)-module étale sur l'anneau de Robba $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$.

À l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, on associe (cf définition III.2.2) son espace $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ de G_L-solutions, qui est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module, et on montre dans le théorème III.2.3 comment la donnée de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ détermine une filtration sur $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$, ce qui en fait un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré. On a alors (les notations restantes sont définies dans le corps du texte) :

Théorème C. — *Si V est une représentation p-adique de G_K semi-stable quand on la restreint à G_L, alors :*

1. $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$;
2. $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$;
3. $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),N=0}$.

Ces identifications sont compatibles à toutes les structures en présence.

Cela permet notamment de « retrouver la filtration » sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ quand on le construit à partir de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ (cf [**9**, proposition 5.6] pour une construction similaire).

Enfin, nous montrons comment reconstruire, pour une représentation semi-stable V, le (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ (comme dans [**10**, §4.3.1]).

Théorème D. — *Si V est une représentation semi-stable de G_K et si*

- *$\{e_i\}_{i=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ adaptée à la décomposition par les pentes de Frobenius ;*
- *$N(e_i) = \sum_{j=1}^d n_{j,i} e_j$;*
- *$\{f_j\}_{j=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ adaptée à la filtration et $\varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^d p_{j,i}^{(n)} f_j$,*

alors $x = \sum_{i=1}^d x_i(X) \otimes e_i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ appartient à $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ si et seulement si :

1. *$N(x_j) + \sum_{i=1}^d n_{j,i} x_i = 0$ pour $j = 1 \cdots d$;*
2. *$\sum_{i=1}^d \iota_n(x_i) p_{j,i}^{(n)} \in t^{-t_H(f_j)} K_n[\![t]\!]$ pour $j = 1 \cdots d$ et $n \geqslant n(r)$;*
3. *$\mathrm{ord}(x_i) \leqslant -\mathrm{pente}(e_i)$ pour $i = 1 \cdots d$.*

Ceci permet de construire « explicitement » les éléments de $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ ce qui a des applications directes à la correspondance de Langlands p-adique.

Remerciements : Je remercie Pierre Colmez, Jean-Marc Fontaine et Kiran Kedlaya pour des discussions éclairantes sur certains points de cet article ainsi que Francesco Baldassarri et le referee pour leurs commentaires sur une première version.

I. Rappels et compléments

Dans tout cet article, K est un corps local qui contient $\mathbf{Q}_p$ et qui est muni d'une valuation discrète étendant la valuation p-adique et pour laquelle K est complet et de corps résiduel parfait k_K.

On écrit $\mu_{p^n} \subset \overline{K}$ (la clôture algébrique de K) pour désigner l'ensemble des racines p^n-ièmes de l'unité, et pour $n \geqslant 1$, on définit $K_n = K(\mu_{p^n})$ ainsi que $K_\infty = \cup_{n=1}^{+\infty} K_n$. Si $n = 0$, on pose $K_0 = W(k_K)[1/p]$ ce qui fait que K/K_0 est totalement ramifiée. Les notations ne sont donc pas vraiment compatibles, mais elles sont usuelles. Finalement, K_0' désigne l'extension maximale non-ramifiée de K_0 contenue dans K_∞.

Soient $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$ le groupe de Galois de K_∞/K, qui s'identifie via le caractère cyclotomique à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$. On note $\sigma : \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \to \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$ le Frobenius absolu (qui relève $x \mapsto x^p$ sur k_K^{sep}).

I.1. Les $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés. — Le corps L désigne une extension galoisienne finie de K, et $G_{L/K}$ le groupe de Galois de L/K. La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés et sa sous-catégorie pleine de $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles sont étudiées en détail dans [**15**, §4]. Nous nous contentons donc de rappeler les définitions et quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module est un L_0-espace vectoriel D de dimension finie et muni d'une application σ-semi-linéaire bijective $\varphi : D \to D$, d'une application linéaire $N : D \to D$ qui vérifie $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action semi-linéaire de $G_{L/K}$ qui commute à φ et N. Si $L = K$, on parle tout simplement de (φ, N)-module (relatif à K).

Un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré est la donnée d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module D et d'une filtration décroissante exhaustive et separée $\mathrm{Fil}^i D_L$ sur $D_L = L \otimes_{L_0} D$, par des sous L-espaces vectoriels stables par $G_{L/K}$. Il est équivalent de se donner une filtration sur $D_K = D_L^{G_{L/K}}$.

La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés est une catégorie additive $\mathbf{Q}_p$-linéaire qui admet des noyaux et des conoyaux (mais qui n'est pas abélienne), ainsi que des produits tensoriels et des Hom internes.

Par abus de langage, on dira que D est un (φ, N, G_K)-module filtré s'il existe une extension finie galoisienne L/K telle que D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré.

Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de dimension 1, on définit $t_H(D)$ comme le plus grand entier i tel que $\mathrm{Fil}^i D_L \neq 0$ et si $\varphi(d) = \lambda d$ avec $d \in D$, alors $v_p(\lambda)$ ne dépend pas du choix de $d \neq 0$ et on définit $t_N(D) = v_p(\lambda)$. Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de dimension $\geqslant 1$, on définit $t_H(D) = t_H(\det D)$ et $t_N(D) = t_N(\det D)$. Si $e \in D_L$, on pose $t_H(e) = t_H(L \cdot e)$.

On dit qu'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré D est admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous-objet D' de D, on a $t_N(D') - t_H(D') \geqslant 0$. La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés et elle est de plus abélienne.

Rappelons que la principale source de $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles est la suivante : si V est une représentation p-adique de G_K dont la restriction à G_L est semi-stable, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible.

I.2. L'anneau de Robba. — Définissons ici quelques anneaux de séries formelles (ces constructions sont faites en détail dans [**11**]). Si r est un réel positif et $F = K_0$ (pour alléger un peu les notations), soit $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ l'anneau des séries formelles $f(X) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$ où $\{a_k \in F\}_{k \in \mathbf{Z}}$ est une suite bornée telle que $f(X)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X) \leqslant 1/r$. Cet anneau est muni d'une action de Γ_F, qui est triviale sur les coefficients et donnée par $\gamma(X) = (1+X)^{\chi(\gamma)} - 1$ et on peut définir un Frobenius $\varphi : \mathbf{B}_F^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_F^{\dagger,pr}$ qui est σ-semi-linéaire sur les coefficients et tel que $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$. Le « théorème de préparation de Weierstrass » montre que