PIERRE COLMEZ

Conducteur d’Artin d’une représentation de de Rham

Astérisque, tome 319 (2008), p. 187-212

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__187_0>

Astérisque
319, 2008, p. 187–212

CONDUCTEUR D'ARTIN D'UNE REPRÉSENTATION DE DE RHAM

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous munissons l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ de Fontaine d'une filtration par « valuation de convergence ». Cette filtration est stable par l'action de $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et sa restriction à $\overline{K}$ coïncide avec la filtration induite par la filtration de $\mathscr{G}_K$ par les sous-groupes de ramification. Si V est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, cette filtration induit une filtration croissante de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et on montre que, si V est potentiellement semi-stable, l'invariant numérique naturel associé à cette filtration coïncide avec le conducteur d'Artin de la représentation $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ du groupe de Weil-Deligne de K.

***Abstract* (Artin conductor of a de Rham representation).** — We endow Fontaine's ring $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ with a filtration defined by means of "valuation of convergence". This filtration is stable the action of $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ and its restriction to $\overline{K}$ coincides with the filtration induced by the filtration of $\mathscr{G}_K$ by ramification subgroups. If V is a de Rham representation, this filtration induces an increasing filtration on $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ and we show that the natural numerical invariant attached to this filtration coincides, if V is potentially semi-stable, with the Artin conductor of the representation $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ of the Weil-Deligne group of K.

Introduction

0.1. Notations. — Soit k_F un corps parfait de caractéristique p et soit $F = W(k_F)[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F. Ceci fait de F un corps complet pour la valuation discrète v_p normalisée par $v_p(p) = 1$, et dont le corps résiduel est k_F.

Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $F^{\mathrm{nr}} \subset \overline{F}$ l'extension maximale non ramifiée de F. La valuation v_p s'étend de manière unique à $\overline{F}$, et on note C le complété de $\overline{F}$ pour v_p. Si L est un sous-corps de C, on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers.

Si $K \subset \overline{F}$ est une extension finie de F, on note $K_0 = K \cap F^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non ramifiée de F contenue dans K, $e_K = [K : K_0]$ l'indice de ramification absolu de K, $v_K = e_K^{-1} v_p$ la valuation de $\overline{K} = \overline{F}$ normalisée par $v_K(K^*) = \mathbf{Z}$, et $\mathscr{G}_K$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K)$ de K. Ce groupe est muni de sa filtration par les sous-groupes $\mathscr{G}_K^s$, $s \geq -1$, *de ramification*, et $\mathscr{G}_K^0$ est le sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_K$ tandis que le sous-groupe d'inertie sauvage de $\mathscr{G}_K$ est la réunion des $\mathscr{G}_K^s$ pour $s > 0$. La filtration sur $\mathscr{G}_K$ induit une filtration croissante de $\overline{K}$ par des sous-corps $\overline{K}^{(r)}$, avec $\overline{K}^{(r)} = \cap_{s>r-1} \overline{K}^{\mathscr{G}_K^s}$. En particulier, $\overline{K}^{(r)}$ est l'extension maximale non ramifiée K^{nr} de K, si $r < 1$ et $\overline{K}^{(1)}$ est l'extension maximale modérément ramifiée de K.

0.2. La filtration de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par valuation de convergence. — Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau de Fontaine. C'est un anneau topologique muni d'une action continue de $\mathscr{G}_F$ et, algébriquement, c'est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C. Il est donc abstraitement isomorphe à $C[[T]]$ et $\overline{F}$ s'identifie à la clôture algébrique de F dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, mais il n'existe pas d'isomorphisme de $C[[T]]$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui soit continu ou qui commute avec l'action de $\mathscr{G}_F$. Malgré tout, on peut introduire une notion de rayon de convergence ou plutôt *valuation de convergence* d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui permet de munir $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ d'une filtration par des sous-anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$, pour $r \geq 0$, et cette filtration est stable sous l'action de $\mathscr{G}_K$. Le premier résultat concernant cette filtration est qu'elle permet de retrouver la filtration de $\overline{K} = \overline{F}$ induite par la filtration de $\mathscr{G}_K$ par les sous-groupes de ramification.

Théorème 0.1. — *Si $r \geq 0$, alors*

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)} \cap \overline{K} = \overline{K}^{(r)}.$$

Remarque 0.2. — Le lien entre ramification supérieure et valuation de convergence de fonctions analytiques a été mis en évidence par Deligne [**8**]. Il est à la base de la théorie d'Abbès et Saito [**1**] de la ramification supérieure dans le cas d'un corps résiduel non parfait. Le point de départ (cf. prop 2.3) de la démonstration du théorème 0.1 est le résultat de Deligne, mais passer par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour définir la valuation de convergence présente l'avantage esthétique d'être complètement intrinsèque.

0.3. Conducteurs d'Artin et de Swan des représentations de de Rham. — Si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, à poids (1) de Hodge-Tate ≤ 0, la filtration précédente sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ induit une filtration

(1) Cette condition assure que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Il est un peu délicat de définir une filtration par valuation de convergence sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}]$ tout entier, la multiplication par t pouvant diminuer la valuation de convergence. Il est probable que ce phénomène ne se produit pas pour les éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dont les conjugués sous $\mathscr{G}_F$ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$; c'est en tout cas le cas pour les périodes des représentations de de Rham comme le montre le cor. 5.13. En particulier, on en déduit les égalités $c_{\mathrm{Art},K}(V(-1)) = c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V(-1)) = c_{\mathrm{Sw},K}(V)$, ce qui permet d'étendre les définitions de $c_{\mathrm{Art},K}$ et $c_{\mathrm{Sw},K}$ au cas d'une représentation de de Rham quelconque.

sur le $K \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-module libre $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ par des sous-$K \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-modules libres $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}(V)$, pour $r \geq 0$. Ceci nous permet d'attacher à V des invariants numériques $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ définis par :

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) = \sum_{r\geq 0} r \cdot \dim\big(\cap_{s>r} \mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V) / \cup_{s<r} \mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V)\big),$$

$$c_{\mathrm{Sw},K}(V) = \sum_{r\geq 1} (r-1) \cdot \dim\big(\cap_{s>r} \mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V) / \cup_{s<r} \mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V)\big).$$

Les invariants $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont appelés respectivement *conducteur d'Artin* et *conducteur de Swan* de V. Cette terminologie est justifiée par le résultat suivant.

Théorème 0.3. — *Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$ d'image finie, alors $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont respectivement les conducteurs d'Artin et de Swan de V.*

Ce résultat est une simple traduction du th. 0.1. Les deux résultats suivants sont plus profonds, mais sont des conséquences immédiates du fait que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable [(2)], du fait que le conducteur d'Artin (resp. de Swan) d'une représentation d'image finie est un entier d'après le théorème de Hasse-Arf, nul si et seulement si le groupe d'inertie (resp. d'inertie sauvage) agit trivialement, et du théorème 0.6 ci-dessous faisant le lien entre les invariants $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ et les conducteurs d'Artin et de Swan du module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$.

Théorème 0.4. — *Si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont des entiers ≥ 0.*

Théorème 0.5. — *Si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

(i) *V est cristalline si et seulement si $c_{\mathrm{Art},K}(V) = 0$;*

(ii) *V devient semi-stable sur une extension modérément ramifiée de K si et seulement si $c_{\mathrm{Sw},K}(V) = 0$.*

0.4. $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$**-modules et représentations p-adiques.** — Un E-$(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module D est un $F^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$-module libre de rang fini, muni des structure suivantes :

(i) une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$ agissant continûment pour la topologie discrète [(3)],

(2) Ce fait, conjecturé par Fontaine, est maintenant un théorème grâce aux travaux de Berger [**4**] ramenant cette conjecture à la conjecture de Crew pour les équations différentielles p-adiques, et ceux d'André [**3, 2**], Mebkhout [**15**] et Kedlaya [**14**] fournissant trois démonstrations indépendantes de la conjecture de Crew. On pourra consulter [**5**] pour une vue d'ensemble de ces travaux. Signalons que, depuis, deux démonstrations de la conjecture de Fontaine ne faisant pas intervenir la théorie des équations différentielles p-adiques ont vu le jour [**6, 13**].

(3) $\mathscr{G}_K$ agit donc à travers un quotient fini ; $\sigma \in \mathscr{G}_K$ agit par $\sigma \otimes 1$ sur $F^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$.

(ii) une action semi-linéaire injective [4] du Frobenius φ commutant à l'action de $\mathscr{G}_K$,

(iii) une action linéaire de N commutant à l'action de $\mathscr{G}_K$ et vérifiant [5] la relation de commutation $N\varphi = p\varphi N$.

Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$, le module

$$\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \cup_{L\subset\overline{F}}(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L},$$

où L parcourt les extensions finies de K contenue dans $\overline{F}$, est un E-$(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module. De plus, si V est potentiellement semi-stable, l'application naturelle

$$\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) \to \overline{K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

est un isomorphisme.

A un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module [6] D, on sait associer son conducteur d'Artin $c_{\mathrm{Art},K}(D)$ et son conducteur de Swan $c_{\mathrm{Sw},K}(D)$ par les formules.

$$c_{\mathrm{Sw},K}(D) = \sum_{r\geq 0} r\cdot \dim(\cap_{s>r} D^{\mathscr{G}_K^s} / \cup_{s<r} D^{\mathscr{G}_K^s}),$$
$$c_{\mathrm{Art},K}(D) = c_{\mathrm{Sw},K}(D) + \dim D - \dim(D^{N=0})^{\mathscr{G}_K^0}.$$

Ces deux invariants sont en fait des entiers d'après le théorème de Hasse-Arf.

Notre résultat principal est alors le suivant :

Théorème 0.6. — *Si V est une E-représentation potentiellement semi-stable de $\mathscr{G}_K$, à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) = c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(V) = c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Remerciements.— Je remercie le rapporteur pour sa lecture attentive.

(4) Cette action est donc bijective. φ agit par $\varphi\otimes 1$ sur $F^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$.

(5) L'action de N est donc nilpotente.

(6) Si k_F est un corps fini, et donc si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on sait associer [**9**] à un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, une représentation $W(D)$ du groupe de Weil-Deligne WD_K de K, en tordant l'action de $g \in \mathrm{W}_K \subset \mathscr{G}_K$ par une puissance convenable de φ de manière à rendre linéaire l'action du sous-groupe de Weil W_K de K. Par ailleurs, si W est une représentation de WD_K, on définit (cf. [**7**]) les conducteurs d'Artin et de Swan de W par exactement les mêmes formules que celles qui nous ont servi à définir les conducteurs d'Artin et de Swan d'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, ce qui montre que, si D est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, alors

$$c_{\mathrm{Sw},K}(W(D)) = c_{\mathrm{Sw},K}(D) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(W(D)) = c_{\mathrm{Sw},K}(D).$$

La définition des conducteurs d'Artin et Swan d'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module est donc la généralisation naturelle de la définition habituelle.