CHRISTOPHE BREUIL

Introduction générale

Astérisque, tome 319 (2008), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__1_0>

Astérisque
319, 2008, p. 1–12

INTRODUCTION GÉNÉRALE

par

Christophe Breuil

1. Retour sur la genèse du programme de Langlands p-adique

Fixons un nombre premier p. Ce paragraphe contient une description de la genèse ayant conduit à la découverte des premiers cas de la correspondance locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

1.1. La conjecture de Fontaine-Mazur. — On peut dire sans exagération que la recherche d'une correspondance entre (certaines) représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ - ou de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ - et (certaines) représentations p-adiques de dimension 2 - ou de dimension n - de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, dont les représentations de de Rham de Fontaine, est un vieux désir de plusieurs arithméticiens : citons par exemple J.-P. Serre (voir [**28**]), B. Mazur, R. Langlands, J.-M. Fontaine ([**21**]), M. Harris, M.-F. Vignéras, P. Schneider, etc. Ce désir s'est trouvé (re)stimulé en 2000 par l'énoncé de la conjecture sur les multiplicités modulaires ([**11**], [**4**], [**24**]), elle-même issue des calculs ayant conduit aux derniers cas de Taniyama-Weil ([**17**], [**9**]). Mais il n'est nul besoin de faire appel à cette conjecture pour motiver *a priori* la recherche d'une correspondance p-adique, car cette dernière est en quelque sorte déjà en germe dans la conjecture de Fontaine-Mazur, comme nous tentons de l'expliquer ci-dessous.

Fixons une fois pour toutes des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit F un corps de nombres, $\mathbb{A}_F$ le groupe localement compact des adèles de F et $n \geq 1$ un entier. On normalise les applications de réciprocité locales de telle sorte que les Frobenius géométriques s'envoient sur les inverses des uniformisantes.

L'énoncé conjectural classique suivant est dû à Langlands, Fontaine, Mazur et Tate :

Conjecture 1.1. — *Il y a une unique bijection entre les deux ensembles :*
{classes d'isomorphismes de représentations automorphes paraboliques algébriques $\pi = \otimes' \pi_\mathfrak{l}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$}

$$\updownarrow$$

{*classes d'isomorphismes de représentations continues irréductibles* $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *non ramifiées en presque toutes les places et potentiellement semi-stables aux places divisant* p}
telle que, pour toute place finie $\mathfrak{l} \mid \ell$, $\ell \neq p$, $\pi_{\mathfrak{l}}$ *et* $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ *se déterminent mutuellement par la correspondance de Langlands locale (convenablement normalisée).*

On rappelle que la correspondance locale a été établie dans [**22**] et [**23**] et qu'une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est algébrique si, pour chaque place infinie, la restriction à $\mathbb{C}^\times$ du paramètre de Langlands correspondant est une somme directe de caractères $z \mapsto z^{a-\frac{n-1}{2}}\overline{z}^{b-\frac{n-1}{2}}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ (voir [**13**]). En fait, la correspondance $\pi_{\mathfrak{l}} \leftrightarrow \rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ ci-dessus passe par la représentation de Weil-Deligne, conjecturalement F-semi-simple, associée à la représentation p-adique $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$. Mais pour $\ell \nmid p$, cette représentation de Weil-Deligne détermine $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$. L'unicité dans la conjecture 1.1 est une conséquence du théorème de Čebotarev du côté galoisien et du théorème de multiplicité 1 fort du côté automorphe.

Plusieurs cas de la conjecture 1.1 sont démontrés (e.g. le cas $n = 1$), mais nous n'en faisons pas la liste ici. Aux places $\mathfrak{p}$ divisant p, il est connu depuis longtemps que $\pi_{\mathfrak{p}}$ en général *ne* determine *pas* $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, mais seulement (conjecturalement) une petite partie : la représentation de Weil-Deligne associée à $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$ ([**20**]). Pourtant, π détermine bien la représentation globale ρ, donc *a fortiori* $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, ce qui veut dire que ce qui manque à $\pi_{\mathfrak{p}}$ pour déterminer $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$ est quand même « quelque part » dans π. À l'origine du programme de Langlands p-adique est la volonté de comprendre ce qu'il faut rajouter à $\pi_{\mathfrak{p}}$ pour reconstruire $\rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. Autrement dit, on veut élucider l'apparition de la théorie de Hodge p-adique côté Galois en termes de théorie des représentations côté automorphe.

Voilà une façon un petit peu moins vague de formuler cet objectif :

Question 1. — *Peut-on associer à* π *une représentation « p-adique naturelle »* $\widehat{\pi} = \otimes' \widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ *telle que, pour toute place finie* $\mathfrak{l}$, $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ *et* $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/F_{\mathfrak{l}})}$ *se déterminent mutuellement ?*

« Naturelle » veut dire par exemple que $\widehat{\pi}$ ou ses facteurs $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}}$ se réalisent dans des espaces de cohomologie convenables. Pour $\mathfrak{l} \nmid p$, on peut déjà prendre $\widehat{\pi}_{\mathfrak{l}} = \pi_{\mathfrak{l}}$, de sorte que la tâche principale est de définir $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \mid p$. Plus précisément, on veut donc que $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}}$ détermine $\pi_{\mathfrak{p}}$, mais aussi contienne la donnée supplémentaire permettant de reconstruire complètement la représentation p-adique $\rho_{\mathfrak{p}} = \rho \mid_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. D'un point de vue local, on cherche donc de nouvelles correspondances $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}} \leftrightarrow \rho_{\mathfrak{p}}$.

Si $\widehat{\pi}$ existe, l'espoir est que la correspondance $\pi \leftrightarrow \rho$ de la conjecture 1.1 se « factorise » naturellement par $\pi \to \widehat{\pi} \leftrightarrow \rho$ où, dans le dernier cas, les représentations locales se déterminent mutuellement place par place, et où l'analyse aux places infinies côté automorphe est remplacée par de l'analyse p-adique aux places divisant p. C'est exactement ce qui se passe lorsque $n = 1$, comme nous l'expliquons maintenant.

1.2. Le cas GL_1. — Soit $\mathbb{A}_F^f$ l'anneau des adèles finis de F et $(\mathbb{A}_F^\times)^0$ la composante connexe de 1 dans $\mathbb{A}_F^\times$. Lorsque $n = 1$, π (comme dans la conjecture 1.1) n'est autre qu'un caractère de Hecke algébrique :

$$\chi : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times.$$

Soit I l'ensemble des plongements $\iota : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ et χ_∞ la partie infinie de χ. Comme χ est algébrique, il y a un unique caractère $\chi_0 : \mathbb{A}_F^\times \to \{\pm 1\}$ trivial sur $(\mathbb{A}_F^f)^\times(\mathbb{A}_F^\times)^0$ et des entiers $(a_\iota)_{\iota\in I}$ uniques tels que pour $x \in F^\times$:

$$\chi_\infty(x) = \chi_0(x)\Pi_{\iota\in I}\iota(x)^{a_\iota}.$$

De plus, par des résultats classiques (voir e.g. [**23**]), $\chi(\mathbb{A}_F^f)$ est en fait contenu dans une extension finie de $\mathbb{Q}$ de sorte que, via les deux plongements fixés, on peut voir $\chi_\mathfrak{l}$ pour toute place finie $\mathfrak{l}$ comme un caractère :

$$\chi_\mathfrak{l} : F_\mathfrak{l}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times.$$

À chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de F divisant p et chaque plongement $\sigma : F_\mathfrak{p} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ est associé un unique plongement $\iota(\mathfrak{p},\sigma) : F \hookrightarrow \mathbb{C}$, que l'on peut voir comme un plongement $\iota(\mathfrak{p},\sigma) : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ via l'injection fixée $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}{\hookrightarrow} & \overline{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_\mathfrak{p} & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & \overline{\mathbb{Q}}_p \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est le plongement fixé $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On définit $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ comme $\widehat{\chi} = \otimes'\widehat{\chi}_\mathfrak{l}$ où :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_\mathfrak{l} &= \chi_0\,|_{F_\mathfrak{l}^\times} \text{ si } \mathfrak{l} \text{ est infini} \\ \widehat{\chi}_\mathfrak{l} &= \chi_\mathfrak{l} \text{ si } \mathfrak{l} \text{ est fini, } \mathfrak{l} \nmid p \\ \widehat{\chi}_\mathfrak{p} &= \chi_\mathfrak{p} \prod_{\sigma : F_\mathfrak{p} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \sigma^{a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}} \text{ si } \mathfrak{l} = \mathfrak{p} \mid p. \end{aligned}$$

Notons :

$$r_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_F^\times/\overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times}$$

l'application de réciprocité globale où $(\mathbb{A}_F^\times)^0$ est la composante connexe neutre de $\mathbb{A}_F^\times$ et $\overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times}$ désigne la fermeture de $(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times$ dans $\mathbb{A}_F^\times$. Le lemme suivant est une conséquence facile des définitions qui précèdent, de la compatibilité entre les applications de réciprocité locale et globale et du théorème de Čebotarev :

Lemme 1.2. — *Le caractère $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ se factorise en un caractère (encore noté) $\widehat{\chi} : \mathbb{A}_F^\times/\overline{(\mathbb{A}_F^\times)^0 F^\times} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ tel que :*

$$\widehat{\chi} \circ r_F : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)^{\mathrm{ab}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

est la représentation ρ (de dimension 1) de la correspondance 1.1.

En d'autres termes, la correspondance $\pi = \chi \leftrightarrow \rho$ de la conjecture 1.1 se factorise bien naturellement par $\pi \to \widehat{\pi} = \widehat{\chi} \leftrightarrow \rho$.

Pour passer au cas $n > 1$, il faut d'abord généraliser la construction du caractère « localement algébrique » $\widehat{\chi}_{\mathfrak{p}}$ ci-dessus. Cela n'est pas difficile si l'on suppose que la représentation automorphe algébrique π est de plus « régulière » au sens de [**13**].

1.3. Représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$. — Rappelons qu'à une représentation algébrique π comme au §1.1 et à un plongement $\iota : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ est associée une liste de poids $a_\iota = (a_{\iota,1}, \cdots, a_{\iota,n})$ dans $\mathbb{Z}$: voir [**13**, §3.3] (attention que la normalisation n'est pas tout à fait la même que celle de *loc. cit.* : on remplace ici $\pi|\cdot|^{\frac{1-n}{2}}$ par $\pi|\cdot|^{\frac{n-1}{2}}$). On dit que π est régulière si, pour tout plongement ι, les $a_{\iota,j}$ sont des entiers distincts, que l'on ordonne de façon croissante avec j.

Soit $L(\iota)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$) de plus haut poids :

$$a_{\iota,1} \leq a_{\iota,2} - 1 \leq a_{\iota,3} - 2 \leq \cdots \leq a_{\iota,n} - n + 1,$$

i.e. $L(\iota)$ est l'induite « algébrique » des matrices triangulaires supérieures à $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ du caractère algébrique :

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^{a_{\iota,1}} x_2^{a_{\iota,2}-1} \cdots x_n^{a_{\iota,n}-n+1}.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de F divisant p, $\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ un plongement et $\iota(\mathfrak{p}, \sigma) : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ le plongement associé au couple $(\mathfrak{p}, \sigma)$ défini au §1.2. On note $\mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma)$ la représentation de $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ donnée par :

$$\mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma) = L(\iota(\mathfrak{p}, \sigma)) \circ \sigma$$

où l'on désigne encore par σ l'injection $\mathrm{GL}_n(F_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ induite par $\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On pose enfin :

$$\begin{aligned} \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}} &= \bigotimes_{\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}(\sigma) \\ \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}} &= \pi_{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{alg}_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

La représentation localement algébrique $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ est l'exact analogue du caractère localement algébrique $\chi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}} = \widehat{\chi}_{\mathfrak{p}} = \chi_{\mathfrak{p}} \otimes (\otimes_{\sigma : F_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \sigma^{a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma)}})$ du §1.2 (modulo le décalage ci-dessus sur les poids $a_{\iota(\mathfrak{p},\sigma),j}$ que nous n'expliquons pas ici). Mais contrairement au cas $n = 1$, on ne peut poser $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ car la représentation $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$ n'est toujours pas suffisante en général pour déterminer la représentation galoisienne $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$. L'idée supplémentaire est alors que la donnée manquante pour « retrouver » la représentation $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_{\mathfrak{p}})}$, au moins lorsque celle-ci est irréductible, pourrait être la donnée d'une *complétion p-adique unitaire* convenable de $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{alg}}$, ou, ce qui revient au