PIERRE COLMEZ

Représentations triangulines de dimension 2

Astérisque, tome 319 (2008), p. 213-258
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__213_0>

Astérisque
319, 2008, p. 213–258

REPRÉSENTATIONS TRIANGULINES DE DIMENSION 2

par

Pierre Colmez

Résumé. — Dans cet article, nous définissons la notion de représentation trianguline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et étudions en détails les représentations triangulines de dimension 2, qui sont l'analogue local des représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires surconvergentes de pente finie.

***Abstract* (2-dimensional trianguline representations).** — In this paper we define the notion of trianguline representation of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, and we study in detail the 2-dimensional trianguline representations which are the local analogue of Galois representations attached to subconvergent finite-slope modular forms.

Introduction

0.1. Notations. — Soit $p \neq 2$ un nombre premier [1]. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\deg(g) \in \mathbf{Z}$ l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$ si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$, alors $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \ker \chi = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, ce qui permet de voir χ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$.

Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$. La notation est justifiée par le fait que $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ est l'ensemble des points L-rationnels d'une variété analytique $\widehat{\mathscr{T}}$. On note juste $x \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère induit par l'inclusion de $\mathbf{Q}_p$ dans L, et $|x|$ le caractère envoyant $x \in \mathbf{Q}_p^*$ sur $p^{-v_p(x)}$. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $w(\delta)$ son *poids*, défini par $w(\delta) = \frac{\log \delta(u)}{\log u}$, où $u \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas une racine de l'unité.

[1] Le cas $p = 2$ demande de modifier certains des arguments de l'article. Il n'y a en principe aucune difficulté.

L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)}\delta(\chi(g)).$$

Si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $w(\delta)$ est alors le poids de Hodge-Tate généralisé de δ. Par exemple $x|x|$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ ; son poids est 1.

0.2. L'espace des paramètres $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$. — On note (δ_1, δ_2) un élément générique de $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$, et on définit $\mathscr{S}$ comme la variété analytique obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On a donc une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L} = \infty \in \mathbf{P}^0(L)$ si la fibre au-dessus de (δ_1, δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0.$$

Si $s \in \mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s) \in \mathbf{Q}_+$ et $w(s) \in L$ définis par

$$u(s) = v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) \quad \text{et} \quad w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, où
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} = \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} \neq \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) = w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) > w(s)$.

Remarque 0.1. — Les exposants "ng", "cris", "st", "ord" et "ncl" sont respectivement censés faire penser à "non géométrique", "cristalline", "semi-stable", "ordinaire" et "non classique". Cette terminologie vient de la classification des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires surconvergentes.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_0 \coprod \mathscr{S}_*$, où
- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s) = 0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s) > 0$.

Si truc $\in \{\mathrm{ng}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \mathrm{ord}, \mathrm{ncl}\}$ et machin $\in \{+, 0, *\}$, on note $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}^{\mathrm{truc}}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}$ et $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ord}}$ et $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}} = \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.

0.3. (φ,Γ)-modules. — Soit $\mathscr{R}$ l'anneau de Robba sur L, et soit $\mathscr{E}^\dagger$ le corps des éléments bornés de $\mathscr{R}$. Les anneaux $\mathscr{E}^\dagger \subset \mathscr{R}$ sont munis d'actions du Frobenius φ et de Γ commutant entre elles.

Un (φ,Γ)-*module* sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$ est un module libre de type fini muni d'actions semi-linéaires de φ et de Γ commutant entre elles, telles que $\varphi(D)$ engendre D (en tant que module sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$). Un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est *triangulable* si c'est une extension successive de (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$.

La classification des (φ,Γ)-modules triangulables de rang 2 se ramène, par définition, à celle des (φ,Γ)-modules de rang 1 et de leurs extensions, ce qui fait l'objet du théorème 0.2 ci-dessous.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ,Γ) module obtenu en multipliant l'action de φ sur $\mathscr{R}$ par $\delta(p)$ et celle de $\gamma \in \Gamma$ par $\delta(\chi(\gamma))$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 0.2. — (i) *Si D est un (φ,Γ)-module de rang* 1 *sur $\mathscr{R}$, il existe un unique $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que $D \cong \mathscr{R}(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1)) = \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}, \mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est un L-espace vectoriel de dimension* 1 *sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}$ est de la forme x^{-i}, avec i entier $\geqslant 0$, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier $\geqslant 1$; dans ces deux cas, $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1))$ est de dimension* 2 *et l'espace projectif associé est naturellement isomorphe à $\mathbf{P}^1(L)$.*

Soit $\widetilde{\mathscr{S}}(L)$ l'ensemble des $s = (\delta_1, \delta_2, h)$, où $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $h \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}, \mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$. Si $s \in \widetilde{\mathscr{S}}(L)$, on note $D(s)$ l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ définie par h. Si $\alpha \in L^*$ et si $s' = (\delta_1, \delta_2, \alpha h)$, les (φ,Γ)-modules $D(s)$ et $D(s')$ sont isomorphes, ce qui fait que l'espace des paramètres naturels pour décrire les (φ,Γ)-modules non irréductibles de rang 2 sur $\mathscr{R}$ est le champs analytique $\widetilde{\mathscr{S}}/\mathbf{G}_m$. La variété analytique $\mathscr{S}$ introduite ci-dessus correspond à l'ouvert « $h \neq 0$ » des (φ,Γ)-modules non scindés.

0.4. Représentations triangulines. — Rappelons que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est équivalente [**14, 5**] à la catégorie des (φ,Γ)-modules *étales* sur $\mathscr{E}^\dagger$. Par ailleurs, Kedlaya a établi [**21**] l'existence d'une filtration par les pentes pour les φ-modules sur $\mathscr{R}$; cette filtration est l'analogue de la décomposition de Dieudonné-Manin. Une conséquence de ce théorème de Kedlaya est que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est aussi équivalente à la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont [(2)] de pente 0.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ respectivement les (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ qui lui sont associés. On dit que V est

[(2)] Un φ-module D sur $\mathscr{R}$ est de pente 0, s'il contient un φ-module Δ étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ tel que l'on ait $D = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \Delta$; le module Δ est alors unique d'après le théorème de Kedlaya.

trianguline [3] si $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ est triangulable. La classification des représentations triangulines [4] de dimension 2 est donc équivalente à celle des (φ, Γ)-module triangulables de pente 0 ; elle repose sur le théorème 0.2 et le théorème de Kedlaya dont un certain nombre de conséquences immédiates sont résumées dans la remarque suivante.

Remarque 0.3. — (i) Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, la pente de $\mathscr{R}(\delta)$ définie par Kedlaya est $v_p(\delta(p))$. Un des points cruciaux pour ce qui suit est qu'une extension de (φ, Γ)-modules peut fort bien être de pente 0 sans que les deux morceaux le soient, mais alors les extensions sont dans le sens opposé à celui permis par le théorème de Kedlaya.

(ii) Le cas scindé n'est pas très passionnant : le module $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si les deux caractères δ_1, δ_2 sont unitaires, la représentation $V(s)$ qui lui correspond est alors la somme directe de δ_1 et δ_2 vus comme des caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) Dans le cas non scindé, si $D(s)$ est de pente 0, alors son déterminant est de pente 0 et $\mathscr{R}(\delta_1)$ est de pente $\geqslant 0$ La première de ces conditions se traduit par $v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0$ et la seconde par $v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0$. Une condition nécessaire pour que $D(s)$ soit de pente 0 si $s \in \mathscr{S}$ est donc que $s \in \mathscr{S}_+$. Cette condition n'est pas suffisante mais presque, comme le montre le (i) du théorème 0.5 ci-dessous.

Si $s \in \mathscr{S}_+$ est tel que $D(s)$ est de pente 0, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui est associée. Cette représentation est trianguline par construction. Réciproquement, le théorème 0.2 et la discussion précédente montrent que, si V est trianguline, alors il existe $s \in \mathscr{S}_+$ tel que $D(s)$ soit de pente 0 et $V \cong V(s)$.

Remarque 0.4. — Le cas où $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_0$ n'est pas spécialement passionnant car alors δ_1 et δ_2 sont unitaires et $V(s)$ est une extension de δ_2 par δ_1 dont la classe est déterminée par $\mathscr{L}$. En particulier, $V(s)$ n'est pas irréductible.

Théorème 0.5. — (i) *Si $s \in \mathscr{S}_*$, le module $D(s)$ est de pente 0, sauf si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$, auquel cas les pentes sont $u(s) - w(s)$ et $w(s) - u(s)$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors $V(s)$ est irréductible. Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}}$, alors $V(s)$ (tordue par un caractère convenable) devient ordinaire sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et n'est donc pas irréductible.*

(iii) *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ et $s' = (\delta_1', \delta_2', \mathscr{L}')$ sont deux éléments distincts de $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors $V(s) \cong V(s')$ si et seulement si $s, s' \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ et $\delta_1' = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2' = x^{-w(s)}\delta_1$.*

Remarque 0.6. — L'application $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \mapsto s' = (x^{w(s)}\delta_2, x^{-w(s)}\delta_1, \infty)$ est une involution de $\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$

(3) Le triangle est un instrument de musique dont le son (triangulin (?)) est presque cristallin...

(4) Dans cet article, nous ne nous intéressons qu'à la dimension 2. Bellaïche et Chenevier [**1**] ont commencé à regarder la situation en dimension supérieure.