Astérisque

LAURENT BERGER
PIERRE COLMEZ

Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique

Astérisque, tome 319 (2008), p. 303-337
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__303_0>

Astérisque
319, 2008, p. 303–337

FAMILLES DE REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM ET MONODROMIE p-ADIQUE

par

Laurent Berger & Pierre Colmez

Résumé. — On donne une formalisation de la méthode de Sen pour les représentations p-adiques. Comme application de ces techniques, on montre que (1) toute représentation p-adique est surconvergente (2) si on se donne un espace $\mathscr{X} = \mathrm{Spm}(S)$ qui paramétrise des représentations p-adiques V_x, alors l'ensemble des x tels que V_x est de de Rham (ou semi-stable, ou cristalline) à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a, b]$ fixé est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$ et (3) les modules de Fontaine $\mathrm{D}_*(V)$ associés varient analytiquement.

***Abstract* (Families of de Rham representations and p-adic monodromy).** — We give a formalization of Sen's method for p-adic representations. As an application of these techniques, we show that (1) every p-adic representation is overconvergent (2) given a space $\mathscr{X} = \mathrm{Spm}(S)$ which parameterizes some p-adic representations V_x, the set of x's such that V_x is de Rham (or semistable, or crystalline) with Hodge-Tate weights in a fixed interval $[a, b]$ is an S-analytic subspace of $\mathscr{X}$ and (3) the associated Fontaine modules $\mathrm{D}_*(V)$ vary analytically.

1. Introduction

L'objet de cet article est d'étudier les familles de représentations p-adiques en utilisant la méthode de Sen. Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et soit S une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach dont on note $\mathscr{X}$ le spectre maximal ; pour pouvoir appliquer la théorie de Hodge p-adique usuelle aux points de $\mathscr{X}$, on suppose que pour tout $x \in \mathscr{X}$, le corps $S/\mathfrak{m}_x$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Une famille de représentations de $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ est un S-module libre V de rang fini muni d'une action S-linéaire et continue de G_K. La méthode de Sen consiste en une formalisation des calculs de Sen (qui portaient à l'origine sur la cohomologie

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 12H25, 14F30.
Mots clefs. — familles de représentations p-adiques, (φ, Γ)-modules, théorie de Hodge p-adique.

galoisienne de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C}_p)$). En appliquant cette méthode aux anneaux d'éléments surconvergents, on retrouve le théorème principal de [**8**] : si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, alors V est surconvergente.

La même méthode appliquée à une famille de représentations fournit une famille de (φ,Γ)-modules surconvergents. De fait, on a le résultat suivant (théorème 4.2.9).

Théorème A. — *Si V est une S-représentation de G_K, alors il existe un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_K^\dagger$-module $\mathrm{D}^\dagger(V)$ localement libre de rang d et stable par φ et Γ_K tel que si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}^\dagger(V) \to \mathrm{D}^\dagger(V_x)$ est un isomorphisme pour tout $x \in \mathscr{X}$.*

Les liens entre (φ,Γ)-modules et théorie de Hodge p-adique permettent alors de montrer le théorème suivant (théorèmes 5.3.1 et 5.3.2).

Théorème B. — *Si V est une S-représentation de G_K, et si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, alors l'ensemble $\mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$ des $x \in \mathscr{X}$ tels que V_x est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$.*

Si l'on suppose que le radical de Jacobson de S est nul et que $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$, alors :

1. *le $S\otimes K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$ est localement libre de rang d ;*
2. *on a $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{S\otimes K} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V$;*
3. *si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V_x)$ est un isomorphisme.*

En chemin, on obtient d'ailleurs des résultats analogues avec « Hodge-Tate » à la place de « de Rham », cf. théorèmes 5.1.3 et 5.1.4.

Une application « en famille » du théorème de monodromie p-adique nous permet alors d'obtenir le résultat suivant (théorème 6.3.2 et corollaire 6.3.3).

Théorème C. — *Soient S une algèbre affinoïde réduite, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ et V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$. Il existe alors une extension finie L de K telle que le $S\otimes L_0$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V)$ est localement libre de rang d et vérifie $(S\otimes L)\otimes_{S\otimes L_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V)$;*

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1. *si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x)$ est un isomorphisme ;*
2. *si τ est un type du groupe d'inertie $I(L/K)$, alors l'ensemble $\mathscr{X}(\tau)$ des x tels que le type de V_x est τ, est une réunion de composantes Zariski connexes de $\mathscr{X}$;*
3. *si $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ ou $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ dénote l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ où V_x est cristalline ou semi-stable, alors $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ et $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ sont des sous-espaces S-analytiques ;*
4. *si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$ est un $S\otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V_x)$ est un isomorphisme ;*
5. *si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V)$ est un $S\otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V_x)$ est un isomorphisme.*

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnons une démonstration d'un théorème non publié de Wintenberger sur la continuité des poids de Hodge-Tate quand une représentation varie. En fait, si $P_{\mathrm{Sen},V}$ dénote le polynôme caractéristique de l'opérateur de Sen d'une représentation V de G_K, nous montrons le résultat suivant (théorème 7.1.1).

Théorème D. — *Il existe une constante $c(d,K)$ telle que si V_1 et V_2 sont deux représentations de dimension d de G_K qui sont congrues modulo p^k, alors les polynômes P_{Sen,V_1} et P_{Sen,V_2} sont congrus modulo $p^{k-c(d,K)}$.*

Notons pour terminer que des résultats en relation avec les théorèmes A, B et C ont été obtenus par Andreatta et Brinon (qui ont étendu la méthode de Sen dans [**2**]), Dee [**12**], Kisin (qui a démontré l'algébricité de $\mathscr{X}(\tau)$ du (2) du théorème C dans [**21**]) et Liu [**22**].

Remerciements : Nous remercions les personnes suivantes pour des discussions utiles sur des points reliés à cet article : Gaëtan Chenevier, Brian Conrad, Philippe Gille et Kiran Kedlaya. Nous remercions par ailleurs Kiran Kedlaya, Ruochuan Liu et Fucheng Tan pour leurs remarques et leurs suggestions.

2. Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons quelques définitions et résultats qui servent dans la suite de l'article.

2.1. Algèbres de coefficients et produits tensoriels complétés

Dans tout cet article, S est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach. On note $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux maximaux de S. On pense aux éléments de $\mathscr{X}$ comme à des points et on écrit $\mathfrak{m}_x$ pour désigner l'idéal maximal de S correspondant au point x. Si $f \in S$, alors on note $f(x)$ l'image de f dans $E_x = S/\mathfrak{m}_x$.

On dit qu'une partie P de $\mathscr{X}$ est un *sous-espace S-analytique* s'il existe un idéal I de S tel que $P = \{x \in \mathscr{X}$ tels que $I \subset \mathfrak{m}_x\}$ ou, ce qui revient au même, s'il existe une famille $\{f_\alpha\}_\alpha$ d'éléments de S tels que $P = \{x \in \mathscr{X}$ tels que $f_\alpha(x) = 0$ pour tout $\alpha\}$.

Plutôt que de travailler avec des normes, on préfère travailler avec des « valuations » sur S, qui pour $f, g \in S$ ne satisfont alors pas $\mathrm{val}_S(fg) = \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$ mais $\mathrm{val}_S(fg) \geqslant \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$, ce qui fait que val_S vérifie :

1. $\mathrm{val}_S(f) = +\infty \Leftrightarrow f = 0$;
2. $\mathrm{val}_S(fg) \geqslant \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$;
3. $\mathrm{val}_S(f+g) \geqslant \inf(\mathrm{val}_S(f), \mathrm{val}_S(g))$;

Dans la suite de cet article, on dit que S est une *algèbre de coefficients* si S vérifie les trois conditions ci-dessous :

1. S contient $\mathbf{Q}_p$ et la restriction de val_S de S à $\mathbf{Q}_p$ est la valuation p-adique val_p ;
2. pour tout $x \in \mathscr{X}$, E_x est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$;

3. le radical de Jacobson $\mathrm{rad}(S)$ est nul (en particulier S est réduite) ;

Notons que les algèbres affinoïdes réduites sont des exemples d'algèbres de coefficients. On note $\mathscr{O}_S$ l'anneau des entiers de S pour val_S.

Si S est une algèbre de coefficients et si $\mathscr{Y}$ est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$, défini par un idéal I, alors $\mathscr{Y}$ est l'espace associé à l'algèbre de coefficients $S/\sqrt{I}$.

Lemme 2.1.1. — *Soit S une algèbre de coefficients.*

1. *Si $f \in S$ est tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{X}$, alors f est une unité de S ;*
2. *si M est un S-module plat, et si $y \in M$ est tel que $y(x) \in M/\mathfrak{m}_x M$ est nul pour tout $x \in \mathscr{X}$, alors $y = 0$.*

Démonstration. — Le (1) résulte du fait que f n'est dans aucun idéal maximal, et que c'est donc une unité. Le (2) résulte du fait que l'application $S \to \prod S/\mathfrak{m}_x$ est injective puisque l'on a supposé que $\mathrm{rad}(S) = 0$, et qu'alors l'application $M \to \prod M/\mathfrak{m}_x M$ reste injective si M est plat. □

Si $x \in \mathscr{X}$, alors le corps E_x est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et est donc muni de la valuation p-adique val_p. Si $f \in S$, on définit alors la valuation spectrale par $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}(f) = \inf_{x\in\mathscr{X}} \mathrm{val}_p(f(x))$. Rappelons le résultat suivant (cf. [**6**, §6.2.4])

Proposition 2.1.2. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite, alors les normes déduites de val_S et $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}$ sont équivalentes.*

Nous avons besoin dans le chapitre 6 du résultat suivant, qui nous assure que la frontière de Shilov du spectre (de Berkovich) de S existe et est finie. Une *semi-valuation multiplicative* est une application $\mathrm{val} : S \to \mathbf{R}$ qui vérifie $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$ et $\mathrm{val}(x+y) \geqslant \inf(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y))$ mais pas $\mathrm{val}(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition 2.1.3. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite, alors il existe $m \geqslant 1$ et m semi-valuations multiplicatives $\mathrm{val}_1, \dots, \mathrm{val}_m$ sur S telles que pour tout $f \in S$, on ait $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}(f) = \min(\mathrm{val}_1(f), \dots, \mathrm{val}_m(f))$.*

Démonstration. — C'est le corollaire 2.4.5 de [**5**], la frontière de Shilov étant définie après la proposition 2.4.4. □

Corollaire 2.1.4. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite munie de la valuation spectrale, alors il existe $m \geqslant 1$ et m corps $E_1, \dots, E_m$ complets pour des valuations discrètes tels que l'on ait un plongement isométrique $S \to \oplus_{i=1}^m E_i$.*

Enfin, si E et F sont deux espaces de Banach, on dénote par $E\widehat{\otimes}F$ leur produit tensoriel complété au-dessus de $\mathbf{Q}_p$. Si E et F sont deux $\mathbf{Z}_p$-modules topologiques complets, on dénote alors par $E\widehat{\otimes}F$ leur produit tensoriel complété au-dessus de $\mathbf{Z}_p$ (cf. [**6**, §2.1.7]).