CHRISTOPHE BREUIL

Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée

Astérisque, tome 331 (2010), p. 65-115

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__331__65_0>

Astérisque
331, 2010, p. 65–115

SÉRIE SPÉCIALE p-ADIQUE ET COHOMOLOGIE ÉTALE COMPLÉTÉE

par

Christophe Breuil

Résumé. — Soit f une forme modulaire parabolique nouvelle de poids $k \geq 2$ sur $\Gamma_0(Np)$ avec $(N,p) = 1$ vecteur propre des opérateurs de Hecke. Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}$ contenant les valeurs propres. Si $k > 2$, on montre que l'adhérence de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ dans le complété p-adique $\varprojlim_n \varinjlim_r H^1(Y(Np^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes E$ détermine l'invariant $\mathscr{L}$ de f, c'est-à-dire la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de la représentation galoisienne p-adique associée à f. En utilisant des résultats de Colmez, on donne une description explicite de ce qu'est cette adhérence. Le cas $k = 2$ se comporte différemment, mais on montre comment on peut encore retrouver l'invariant $\mathscr{L}$, du point de vue $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$, dans le complété p-adique précédent.

***Abstract* (Special p-adic series and completed étale cohomology).** — Let f be a new modular parabolic form of weight $k \geq 2$ on $\Gamma_0(Np)$ with the eigenvector of Hecke operators $(N,p) = 1$. Let E be a finite extension of $\mathbf{Q}$ containing the eigenvalues. If $k > 2$, we show that the closure of the representation $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f)$ of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ in the p-adic completion $\varprojlim_n \varinjlim_r H^1(Y(Np^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes E$ gives the invariant $\mathscr{L}$ of f, that is the restriction of the p-adice Galois representation of f to $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. By using Colmez's results we give an explicit description of this closure. The case $k = 2$ behaves differently, but we show how one can still find the invariant $\mathscr{L}$ from the $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ view point, in the previous p-adic completion.

1. Introduction et notations

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier, f une forme modulaire parabolique de poids 2 sur $\Gamma_1(M)$ vecteur propre des opérateurs de Hecke et $\sigma(f)$ la représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée. La composante automorphe locale $\pi_p(f)$ se réalise dans la représentation lisse $\varinjlim H^1_c(Y(Mp^r), \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour E extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ (il s'agit ici de la cohomologie de Betti à

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 11F.
Mots clefs. — Série spéciale p-adique, correspondance de Langlands p-adique; cohomologie étale complétée.

support compact). On sait que $\pi_p(f)$, en général, ne détermine pas $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ mais seulement la représentation de Weil-Deligne associée. Il est donc naturel de se demander où est l'information qui manque, côté théorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, pour reconstruire cette représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Considérons le $\mathbb{Z}_p$-module ([**17**]) :

$$\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \big(\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\big)$$

qui s'identifie au complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r), \mathbb{Z}_p)$. L'espace $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ est un Banach p-adique muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Notons $\widehat{\pi}_p(f)$ l'*adhérence* de $\pi_p(f)$ dans ce Banach, c'est-à-dire le complété p-adique de $\pi_p(f)$ par rapport au $\mathscr{O}_E$-réseau $\pi_p(f) \cap (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes \mathscr{O}_E)$. C'est aussi un Banach p-adique avec action unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Faisons l'hypothèse que la représentation galoisienne p-adique $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est absolument irréductible. L'espoir de l'auteur est alors que, dans ce cas, $\widehat{\pi}_p(f)$ *détermine* la représentation $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ et *ne* dépend *que* d'elle. Autrement dit, l'auteur espère que la complétion $\widehat{\pi}_p(f)$ de $\pi_p(f)$ contient exactement l'information qui manque à $\pi_p(f)$ pour reconstruire $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ lorsque cette dernière est irréductible.

Plus généralement, lorsque f est de poids $k \geq 2$, on peut encore plonger la représentation localement algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ dans $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes E$ et considérer de même son adhérence $\widehat{\pi}_p(f)$. Comme précédemment, l'auteur espère que $\widehat{\pi}_p(f)$ détermine la représentation $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ lorsque cette dernière est irréductible et ne dépend que d'elle (voir [**16**]). Si cet espoir correspond à une réalité, il doit alors être possible de construire les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ de manière *purement locale* comme spéculé dans [**4**], §1.3 [(1)].

Lorsque $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ n'est pas irréductible, $\widehat{\pi}_p(f)$ en général ne suffit pas à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$, mais $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes E$ contient alors un Banach plus gros que $\widehat{\pi}_p(f)$ et qui, lui, détermine $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (voir [**6**] et le cas $k = 2$ du présent article).

Considérons d'abord le cas où $\pi_p(f)$ est une série principale. Il se trouve que dans ce cas $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ *suffit* déjà à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (lorsque celle-ci est irréductible). On peut alors montrer (au moins si la représentation de Weil-Deligne associée à $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est bien F-semi-simple comme il est conjecturé) que le Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ est alors simplement le complété p-adique de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par rapport à un quelconque $\mathscr{O}_E$-réseau de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ de *type fini* sur $\mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (de tels réseaux existent bien par les résultats de [**34**] et [**20**], cf. [**4**]). En fait, le réseau induit sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes \mathscr{O}_E$ est nécessairement commensurable à un réseau de type fini sur $\mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ ([**5**], Cor.5.3.4). Ceci n'est pas vrai lorsque $\pi_p(f)$ n'est pas une série principale.

(1) Voir sur ces questions [**18**].

Dans cet article, on s'intéresse au cas immédiatement après, c'est-à-dire celui où $\pi_p(f)$ est, à torsion non ramifiée près, la représentation de Steinberg. Lorsque $k > 2$, $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est alors toujours absolument irréductible. Ce cas représente un bon test pour l'« espoir » ci-dessus car $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ ne suffit plus à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$: il manque l'invariant $\mathscr{L}(f)$ de la forme f qui est le paramètre de la filtration de Hodge sur le module de Dieudonné-Fontaine filtré associé à f (voir [**9**], [**21**] et [**13**] pour une comparaison des différentes définitions de $\mathscr{L}(f)$). L'objectif de cet article est de montrer que $\widehat{\pi}_p(f)$ détermine exactement l'invariant $\mathscr{L}(f)$. Lorsque $k = 2$, $\sigma(f)\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (qui est dans ce cas réductible) n'est plus déterminé par $\widehat{\pi}_p(f)$ mais on montre que $\widehat{H}^1_c \otimes E$ contient un Banach topologiquement réductible de longueur 2 avec $\widehat{\pi}_p(f)$ en unique sous-objet et qui, lui, détermine $\mathscr{L}(f)$ et ne dépend que de $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$.

On donne plus en détails maintenant les résultats principaux de l'article.

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et notons $B(k)$ le Banach obtenu en complétant $|\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E$ Steinberg par rapport à un quelconque $\mathscr{O}_E$-réseau de type fini sur $\mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (où $|\cdot|$ est la norme p-adique). Il est muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-2$ (via la réciprocité locale pour $\mathbb{Q}_p$ convenablement normalisée). Ce Banach admet la description concrète suivante, déduite via [**4**], §4.6 de résultats de Teitelbaum (cf. §3.2) : c'est le Banach des fonctions $h : \mathbb{Q}_p \to E$ telles que $h(z)\,|_{\mathbb{Z}_p}$ est de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ et $z^{k-2}h(1/z)\,|_{\mathbb{Z}_p-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$, quotienté par les polynômes en z de degré au plus $k-2$ (rappelons que, si k est pair pour simplifier, une fonction est de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ moralement si elle est $\frac{k-2}{2}$ fois dérivable avec dernière dérivée continue, cf. §3.2 pour le cas général). L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est induite par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(h)(z) = |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(-cz+a)^{k-2}h\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big).$$

Dans [**4**], on a associé à tout entier $k \geq 2$ et tout $\mathscr{L} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ un Banach p-adique $B(k,\mathscr{L})$ sur E (quitte à agrandir E) muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-2$. La définition est par dualité : si $\log_{\mathscr{L}}$ est la branche du logarithme p-adique sur $\mathbb{C}_p^\times$ telle que $\log_{\mathscr{L}}(p) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{L}$, le dual de $B(k,\mathscr{L})$ est un sous-espace convenable de l'espace des fonctions « $\log_{\mathscr{L}}$-rigides » sur le demi-plan p-adique avec action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de poids $2-k$ (cf. §3.1). Pour $k=2$, $B(2,\mathscr{L})$ est une extension non scindée $0 \to B(2) \to B(2,\mathscr{L}) \to E \to 0$ dépendant de $\mathscr{L}$. Pour $k > 2$, $B(k,\mathscr{L})$ est une complétion p-adique de $|\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes$ Steinberg dépendant de $\mathscr{L}$ et on a un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant continu $B(k) \to B(k,\mathscr{L})$ d'image dense (en fait surjectif, voir théorème 1.1.1 ci-dessous). On donne dans ce texte une description directe plus concrète des $B(k,\mathscr{L})$ pour $k > 2$ (cf. Cor.3.3.4) :

Théorème 1.1.1. — *Si $k > 2$, le Banach $B(k, \mathscr{L})$ avec son action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie au quotient du Banach $B(k)$ par l'adhérence du sous-espace vectoriel des fonctions :*

$$h(z) = \sum_{i \in I} \lambda_i (z - z_i)^{n_i} \log_{\mathscr{L}}(z - z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in E$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$, $n_i \in \{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor + 1, \ldots, k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i \in I} \lambda_i (z - z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que les $B(2, \mathscr{L})$ (munis de leur action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sont tous distincts, admissibles au sens de [**27**] et topologiquement de longueur 2. Pour $k > 2$, les $B(k, \mathscr{L})$ (munis de leur action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sont encore tous distincts, admissibles au sens de [**27**] et topologiquement irréductibles, mais la preuve est alors nettement plus délicate et utilise de façon cruciale la théorie des (φ, Γ)-modules ([**10**], [**12**]), même si quelques résultats partiels peuvent s'obtenir par un calcul géométrique plus direct ([**7**]). Les Banach $B(k, \mathscr{L})$ et leurs tordus par des caractères non ramifiés de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ « correspondent » aux représentations p-adiques semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2, de poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ et de déterminant le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-1$ (à un caractère non ramifié près).

Le résultat principal de ce texte est (cf. Cor.5.1.9) :

Théorème 1.1.2. — *Soit $f = \sum_{n>0} a_n e^{2i\pi nz}$ une forme modulaire parabolique normalisée de poids $k > 2$ nouvelle sur $\Gamma_1(M)$ avec $M = Np$ et $(N,p) = 1$. On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke et son caractère trivial en p de sorte que $\pi_p(f) = \mathrm{Steinberg} \otimes \mathrm{nr}(a_p^{-1})$ où $\mathrm{nr}(\lambda)(x) \overset{\text{déf}}{=} \lambda^{\mathrm{val}(x)}$ si $x \in \mathbb{Q}_p$. Si E est une extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on a :*

$$\widehat{\pi}_p(f) \simeq B(k, -\mathscr{L}(f)) \otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}).$$

Lorsque $k = 2$, on a $\widehat{\pi}_p(f) \simeq B(2) \otimes \mathrm{nr}(a_p^{-1})$ et $-\mathscr{L}(f)$ est la *seule* valeur de $\mathscr{L}$ telle que l'injection $\widehat{\pi}_p(f) \hookrightarrow \widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ s'étende en une injection $B(2, \mathscr{L}) \otimes \mathrm{nr}(a_p^{-1}) \hookrightarrow \widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ (voir corollaire 1.1.6 ci-dessous). Le fait que la valeur de $\mathscr{L}$ intervenant dans $\widehat{\pi}_p(f)$ lorsque $k > 2$ soit précisément $-\mathscr{L}(f)$ est conséquence des résultats de [**3**] pour k pair et des résultats de [**10**] (voir aussi [**12**]) combinés avec le corollaire 5.2.4 pour $k > 2$ (voir §5.1 et aussi [**16**], Th.7.10.1).

On explique maintenant les étapes de la preuve du théorème 1.1.2.

Soit B un Banach p-adique à coefficients dans une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $B^\vee$ son dual muni de l'action duale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \big(\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(N,p^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\big)$ où N est premier à p et $Y(N,p^r) = Y(K_1^p(N)K(p^r))$ est la courbe modulaire « associée » au groupe de congruence $\Gamma_1(N) \cap \Gamma(p^r)$ (voir §2.1 et §2.2 pour une définition précise). On exprime pour commencer les espaces $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B, \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E)$ comme des symboles modulaires (cf. Th.2.4.2) :