

**SYSTÈMES HYPERBOLIQUES ET VISCOSITÉ ÉVANESCENTE**  
[d'après S. Bianchini et A. Bressan]

par **Frédéric ROUSSET**

**INTRODUCTION**

De nombreux phénomènes physiques provenant de domaines variés comme la mécanique des fluides, l'élasticité ou l'électromagnétisme peuvent être décrits par des systèmes de lois de conservation

$$(1) \quad u_t + f(u)_x = 0,$$

où  $u(t, x)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  est la variable de temps,  $x \in \mathbb{R}$  est la variable d'espace et le flux  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est régulier. Dans tout cet exposé, on notera les dérivées partielles par des indices :  $u_t = \partial u / \partial t$ ,  $f(u)_x = \partial f(u) / \partial x$ . On considère le problème de Cauchy, où le système (1) est complété par une donnée initiale

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Il est bien connu (même sur l'exemple très simple de l'équation de Burgers  $u_t + (u^2/2)_x = 0$ , voir par exemple [11], [21], [32], [40]) que pour des données initiales  $u_0$  très régulières les solutions de (1) peuvent développer des discontinuités en temps fini. Il faut donc chercher les solutions de (1) dans un espace de fonctions discontinues et comprendre (1) au sens faible

$$\iint (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt = 0,$$

pour toute fonction  $\phi$  régulière à support compact dans  $]0, T[ \times \mathbb{R}$ . Cependant ces solutions faibles ne sont en général pas uniques (cela peut encore se vérifier sur l'équation de Burgers). Il faut donc se donner des critères permettant d'isoler les solutions « physiquement » admissibles. Il existe de nombreux critères (conditions d'entropie, de Lax, de Liu, du profil de viscosité), voir par exemple le livre de C. Dafermos [21] pour une comparaison entre ces différents critères. Le moyen le plus naturel pour trouver

certain d'entre eux est de considérer que les lois de conservation (1) sont obtenues à partir de systèmes plus complexes

$$(3) \quad u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

en négligeant les effets de la diffusion. Une conjecture naturelle est donc que les solutions admissibles de (1) doivent être obtenues comme limites de solutions de (3) quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Sur le plan mathématique cette brève introduction soulève deux problèmes importants :

1. Montrer que le problème de Cauchy pour (1) est bien posé (c'est-à-dire qu'il existe une unique solution admissible dépendant continûment des données).
2. Montrer que ces solutions peuvent effectivement s'obtenir comme limite de solutions de (3) lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Avant de poursuivre, signalons que, dans le cas scalaire ( $n = 1$ ), ces deux questions ont été résolues il y a longtemps dans un cadre  $L^\infty$  grâce au principe du maximum [30]. La méthode de compacité par compensation basée sur des estimations  $L^\infty$  a aussi permis de montrer pour certains systèmes  $2 \times 2$  la convergence faible de  $u^\varepsilon$  vers une solution de (1) [23]. Enfin, pour des systèmes généraux, des méthodes de type « perturbations singulières » [26], [44] avaient permis de montrer que certaines solutions de (1) (régulières par morceaux avec des chocs sans interactions) étaient limites de solutions de (3).

Le but de cet exposé est de présenter les résultats obtenus dans la résolution du problème 2 par S. Bianchini et A. Bressan [7]. Néanmoins, les deux problèmes n'étant pas indépendants, nous rappelons d'abord les résultats obtenus dans la résolution du problème 1 par Bressan et divers collaborateurs pour des fonctions à variations bornées (notées VB).

## 1. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR (1)

Commençons par fixer le cadre de la théorie ; on considère des systèmes strictement hyperboliques

$$(SH) \quad df(u) \text{ est diagonalisable à valeurs propres réelles simples.}$$

Ces valeurs propres seront notées  $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ , les vecteurs propres correspondants  $r_i(u)$ .

Pour des données initiales  $u_0$  à variation totale suffisamment petite, l'existence globale de solutions entropiques avait été montrée par Glimm dans les années 60 [24]. Une autre méthode de construction dite de « front tracking » a par la suite été proposée [20, 23, 8, 38, 1]. Sans entrer dans les détails, ces deux méthodes de construction reposent sur la résolution du problème de Riemann au moyen de  $n$  ondes simples due

à Lax [31], *i.e.* la résolution de (1), (2) lorsque  $u_0$  est constante par morceaux, de la forme

$$(4) \quad u_0(x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases}$$

Cela demande une hypothèse supplémentaire que nous ferons tout au long de ce paragraphe :

( $\diamond$ ) les champs caractéristiques sont vraiment non linéaires  $d\lambda_i(u)r_i(u) \neq 0, \forall u$  ou linéairement dégénérés  $d\lambda_i(u)r_i(u) = 0, \forall u$ .

Dans les deux méthodes, l'existence de solutions est obtenue par un argument de compacité (« l'injection » de  $VB(\mathbb{R})$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  est compacte), ce qui ne garantit pas du tout l'unicité. Cette question a été résolue dans les dix dernières années par Bressan et ses collaborateurs [9, 13, 14, 18, 16, 15, 17]. On peut résumer les résultats obtenus comme suit :

– Les solutions obtenues comme limite d'approximation par les schémas de Glimm ou de « front tracking » sont uniques et dépendent de manière lipschitzienne du temps et de la donnée initiale [35], [36], [18]. Plus précisément, la méthode de front-tracking permet de construire de manière unique un semi-groupe lipschitzien  $(t, \bar{u}) \mapsto S_t \bar{u}$  défini pour  $t \geq 0$  et  $\bar{u} \in \mathcal{D} \subset L^1$ , qui résout le problème de Cauchy pour (1) et dont on peut en fait caractériser les trajectoires. Soit  $u \in \text{Lip}([0, T], L^1)$  telle que  $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}$  ; alors  $u$  est une trajectoire du semi-groupe si et seulement si, au voisinage de chaque point  $(\tau, \xi)$ , pour des temps positifs,  $u$  peut être bien approchée par une solution du problème de Riemann et par une solution d'un problème linéaire à coefficients constants là où la variation totale est petite. Pour énoncer un théorème précis, notons  $u^- = \lim_{x \rightarrow \xi^-} u(\tau, x)$ ,  $u^+ = \lim_{x \rightarrow \xi^+} u(\tau, x)$  et  $U^1_{(u, \tau, \xi)}$  la solution du problème de Riemann avec donnée  $(u^-, u^+)$ . On définit aussi  $U^2_{(u, \tau, \xi)}$  la solution du problème de Cauchy linéaire à coefficients constants à donnée en  $t = \tau$

$$w_t + df(u(\tau, \xi))w_x = 0, \quad w(\tau, x) = u(\tau, x) ;$$

on a alors :

THÉORÈME 1.1 ([9], [11]). — Soit  $u \in \text{Lip}([0, T], L^1)$  telle que  $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}$  pour tout  $t$  ; alors, il existe  $\bar{u} \in \mathcal{D}$  tel que  $u = S_t \bar{u}$  si et seulement si

$$\text{i) } \forall (\tau, \xi), \beta > 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{\xi-h\beta}^{\xi+h\beta} |u(\tau+h, x) - U^1_{(u, \tau, \xi)}(h, x - \xi)| dx = 0,$$

$$\text{ii) } \exists C, \beta > 0, \forall a < \xi < b, \forall \tau \geq 0,$$

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{a+\beta h}^{b-\beta h} |u(\tau+h, x) - U^2_{(u, \tau, \xi)}(h, x)| dx \leq C \quad VT(u(\tau)_{/[a, b]}).$$

Dans tout cet exposé, on notera  $VT$  la variation totale d'une fonction.

– Le fait surprenant du théorème précédent est que toute fonction  $u$  vérifiant i) et ii) sera en fait une solution de (1). Un autre résultat d'unicité consiste en une caractérisation directe des solutions entropiques de (1) qui satisfont une condition supplémentaire [16], [17], [15]. Par exemple, on dit que  $u$  satisfait la condition d'oscillation douce (« tame oscillation ») s'il existe  $C > 0$ ,  $\delta > 0$  tels que pour tout  $t > 0$  et  $a, b$ ,  $a < b$  l'oscillation  $\omega(u, \Delta) = \sup_{(s,y), (s',y') \in \Delta} \{|u(s,y) - u(s',y')|\}$  de  $u$  sur le triangle

$$\Delta = \{(s, y), s \geq t, a + (s - t)/\delta < y < b - (s - t)/\delta\}$$

vérifie :

$$\omega(u, \Delta) \leq C \text{ VT } (u(\tau))_{/[a,b]}.$$

THÉORÈME 1.2 ([15]). — *Toute solution faible de (1), (2) qui satisfait la condition de choc de Lax et la condition d'oscillation douce coïncide avec une trajectoire du semi-groupe construit par le schéma de front-tracking.*

Enfin, on peut montrer que le fait de travailler dans  $VB$  et les hypothèses « donnée initiale à variation totale petite » et « système strictement hyperbolique » (SH) sont cruciales. Il existe des contre-exemples (voir par exemple [10]) montrant :

(1) si le système n'est pas strictement hyperbolique, les solutions peuvent ne pas dépendre continûment de la donnée initiale en norme  $L^1$ ,

(2) si la donnée initiale est seulement dans  $L^\infty$ , la solution peut devenir à valeurs mesures en temps fini. L'unicité et la dépendance continue par rapport aux données sont alors perdues,

(3) si la variation totale à  $t = 0$  est grande, alors la norme  $L^\infty$  peut exploser en temps fini. En particulier, il n'existe pas de solution globale dans  $VB$  [29].

## 2. LES RÉSULTATS DE BIANCHINI ET BRESSAN

THÉORÈME 2.1 ([7]). — *Considérons le problème de Cauchy*

$$(5) \quad u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(0, x) = \bar{u}(x),$$

où  $A$  est régulière et strictement hyperbolique (i.e. vérifie (SH)) alors il existe des constantes  $C$ ,  $L$ ,  $L'$  et  $\delta > 0$  telles que si  $\text{VT}(\bar{u}) < \delta$  alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , (5) a une unique solution  $u^\varepsilon$  définie pour tout  $t \geq 0$ . En notant  $S_t^\varepsilon \bar{u}$  cette solution, on a :

– une borne uniforme sur la variation totale

$$(6) \quad \text{VT}(S_t^\varepsilon \bar{u}) \leq \text{CVT}(\bar{u}),$$

– des estimations de stabilité

$$(7) \quad \|S_t^\varepsilon \bar{u} - S_t^\varepsilon \bar{v}\|_{L^1} \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1},$$

$$(8) \quad \|S_t^\varepsilon \bar{u} - S_s^\varepsilon \bar{u}\|_{L^1} \leq L'(|t - s| + |\sqrt{\varepsilon t} - \sqrt{\varepsilon s}|),$$

– la convergence : quand  $\varepsilon$  tend vers zéro,  $u^\varepsilon$  converge vers une trajectoire d'un semi-groupe  $S$  tel que

$$(9) \quad \|S_t \bar{u} - S_s \bar{v}\|_{L^1} \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\| + L'|t - s|.$$

Appelons les trajectoires de  $S$  « solutions de viscosité évanescence » pour le système hyperbolique  $u_t + A(u)u_x = 0$ .

Dans le cas conservatif  $A = df$ , toute solution de viscosité évanescence est une solution faible de (1) qui satisfait la condition d'admissibilité de Liu. En supposant de plus  $(\diamond)$ , les solutions de viscosité évanescence coïncident avec les limites uniques des schémas de Glimm et de front tracking.

Ce théorème provenant de [7] est l'aboutissement de toute une série de travaux [3, 6, 4, 5]; il contient en fait plusieurs résultats, chacun étant intéressant par lui-même. L'idée directrice de ces travaux était l'obtention d'estimations VB permettant d'obtenir la convergence sans hypothèse très particulière sur la structure de la solution de (1) qu'il est nécessaire de faire pour utiliser les méthodes de perturbation singulière [26], [44].

Le théorème 2.1 montre, pour des données initiales quelconques à variation totale petite, l'existence d'une solution globale pour le problème de Cauchy (5) vérifiant les trois estimations (6), (7), (8). Cela généralise considérablement des travaux antérieurs où la stabilité était obtenue au voisinage de solutions particulières (chocs ou détente) à variations totales petites [25, 26, 34, 41, 42, 44]. Dans certains cas particuliers, d'autres méthodes permettent de supprimer l'hypothèse de petitesse : pour des perturbations régulières d'un choc de forte amplitude, on a des résultats de stabilité et d'approximation par viscosité sous hypothèse spectrale [46, 39] même en plusieurs dimensions d'espace [45, 27]. Nous donnerons dans la suite des éléments de preuve de cette partie du théorème.

En ce qui concerne la partie convergence, on peut facilement montrer à partir du théorème de Helly (qui affirme que l'injection de  $BV(\mathbb{R})$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  est compacte) et des estimations (6) et (7), (8) qu'il existe une sous-suite  $\varepsilon_n$  telle que  $S_t^{\varepsilon_n} \bar{u}$  converge dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  pour tout  $t \geq 0$  et tout  $\bar{u}$  tel que  $VT(\bar{u}) \leq \delta$ . Ce même argument de compacité était déjà utilisé dans les méthodes de Glimm et de front-tracking (voir par exemple le livre de Bressan [11]). On remarque que dans le cas conservatif  $A = df$ , cela donne un procédé de construction de solutions faibles pour (1), (2) qui n'utilise pas l'hypothèse  $(\diamond)$ . Cela généralise une série de résultats [33, 37, 28] où l'hypothèse était relaxée mais pas complètement supprimée. La convergence reposant sur un argument de compacité, le problème est ensuite de montrer l'unicité des solutions obtenues. Dans le cas conservatif  $A = df$ , les solutions de viscosité évanescence sont des solutions faibles de (1). Avec l'hypothèse  $(\diamond)$ , il suffit alors de montrer que les trajectoires des semi-groupes obtenus comme limites de  $S^{\varepsilon_n}$  possèdent la liste de propriétés permettant d'utiliser le théorème 1.2. La méthode consiste à montrer que les solutions de