

CATÉGORIES DÉRIVÉES ET GÉOMÉTRIE BIRATIONNELLE
[d'après Bondal, Orlov, Bridgeland, Kawamata...]

par **Raphaël ROUQUIER**

1. INTRODUCTION

L'objet principal de cet exposé est la catégorie dérivée $D^b(X)$ des faisceaux cohérents sur une variété X . La catégorie dérivée organise l'information homologique (groupes d'extensions entre faisceaux cohérents) et numérique (K -théorie). Nous allons étudier son comportement au cours des opérations de « chirurgie algébrique » (« flips » et « flops »).

La catégorie dérivée d'un espace projectif se décrit à partir d'une algèbre de dimension finie (Beilinson, 1978) et ceci a placé dans un cadre approprié les descriptions de fibrés vectoriels en terme d'algèbre linéaire. À la suite de ce résultat, des descriptions analogues (décomposition semi-orthogonale de la catégorie dérivée) ont été recherchées pour d'autres variétés. De telles décompositions devraient apparaître en présence d'un « flip », étape cruciale du programme de Mori de modèles minimaux (MMP) pour la classification des variétés projectives lisses, et cela a amené en particulier la question de l'invariance de la catégorie dérivée par « flop » (Bondal-Orlov, 1995). D'un autre côté, la conjecture homologique de symétrie miroir (Kontsevich, 1994) a elle aussi posé le problème de l'invariance birationnelle de la catégorie dérivée, pour des variétés de Calabi-Yau. Indépendamment, la construction d'une équivalence dérivée entre une variété abélienne et sa duale (Mukai, 1981) a montré la relation entre la réalisation d'une variété X comme un espace de modules d'objets sur Y et la construction d'une équivalence (ou d'un foncteur pleinement fidèle) entre la catégorie dérivée de X et celle de Y .

Commençons par poser des problèmes sur les catégories dérivées de variétés, en suivant trois points importants du MMP. On note K_X le diviseur canonique d'une variété lisse X et on considère l'équivalence linéaire entre diviseurs. On

se donne un diagramme où f et g sont des morphismes birationnels entre variétés projectives lisses complexes

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

On a une première conjecture sur les flops généralisés (cf. [8, Conjecture 4.4] et [31, Conjecture 1.2]) :

CONJECTURE 1.1 (Bondal-Orlov). — *Si $f^*K_X \sim g^*K_Y$, alors $D^b(X) \simeq D^b(Y)$.*

On sait que dans cette situation les nombres de Hodge coïncident (cf. remarque 3.9). La conjecture a une réponse positive en dimension 3 (corollaire 4.11), pour des variétés symplectiques de dimension 4 (corollaire 4.7) et dans le cadre torique (théorème 4.15). Pour des variétés de Calabi-Yau (ω trivial), on s'attend donc à ce que birationalité et équivalence dérivée coïncident, comme le prédit la conjecture de Kontsevich de symétrie miroir [35]. La « réciproque » de la conjecture 1.1 n'est pas vraie (remarque 3.15). On a une conjecture sur les flips généralisés [8, Conjecture 4.4] :

CONJECTURE 1.2 (Bondal-Orlov). — *Si $f^*K_X - g^*K_Y$ est équivalent à un diviseur effectif, alors il existe un foncteur pleinement fidèle $D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$.*

La minimisation d'une variété dans le MMP devrait alors s'interpréter comme une minimisation de la catégorie dérivée, un modèle minimal pour une variété X devant être construit comme un espace de module d'objets de la catégorie dérivée de X . Dans la conjecture 1.2, il serait aussi souhaitable de savoir décrire l'orthogonal de l'image de $D^b(Y)$ dans $D^b(X)$.

On a enfin une conjecture de finitude [31, Conjecture 1.5] :

CONJECTURE 1.3 (Kawamata). — *Soit X une variété projective lisse. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de variétés projectives lisses Y telles que $D^b(X) \simeq D^b(Y)$.*

La réponse est positive en dimension ≤ 2 (cf. [14, Corollary 1.2] et [31, Theorem 1.6]) et pour X, Y des variétés abéliennes [47, Corollary 2.8].

Dans la première partie de cet exposé, nous montrons, dans la situation extrême où le fibré canonique est ample ou anti-ample, comment reconstruire la variété à partir de la catégorie dérivée (théorème 2.1). Nous expliquons ensuite le mécanisme de dévissage de catégories dérivées (§ 2.2). Dans le § 3, nous présentons la construction de transformations à noyau et les invariants transportés par les équivalences, puis nous exposons le cas des variétés abéliennes et des surfaces, où la théorie est presque complète. La partie § 4 présente plusieurs cas de réponse positive aux conjectures 1.1 et 1.2.

Outre le livre en préparation [26], le lecteur pourra consulter [8, 16, 25, 48] pour des exposés généraux.

Remerciements. — Je remercie Arnaud Beauville, Tom Bridgeland, Olivier Debarre et Alastair King pour leurs remarques sur une version préliminaire de ce texte, et Daniel Huybrechts, pour de très nombreuses discussions.

2. PROPRIÉTÉS INTERNES

2.1. Reconstruction

2.1.1. Terminologie. — Une *variété* sera pour nous un schéma quasi-projectif X sur $\mathbf{C}$. La plupart du temps, il s'agira de variétés projectives lisses. Les points considérés seront toujours des points fermés.

La catégorie dérivée $D^b(X)$ est définie comme la localisation de la catégorie des complexes bornés de faisceaux cohérents en la classe des quasi-isomorphismes (= morphismes de complexes qui induisent un isomorphisme entre faisceaux de cohomologie). Ses objets sont donc les complexes bornés de faisceaux cohérents sur X . Les flèches sont obtenues à partir de morphismes de complexes auxquels les inverses des quasi-isomorphismes ont été ajoutés. La catégorie $D^b(X)$ n'est pas abélienne en général, mais elle possède la structure de catégorie triangulée : le rôle des suites exactes courtes est joué par les triangles distingués.

Tous les foncteurs considérés entre catégories triangulées seront triangulés. Une sous-catégorie *épaisse* d'une catégorie triangulée est une sous-catégorie triangulée pleine close par facteurs directs. La sous-catégorie d'une catégorie triangulée *engendrée* (resp. *faiblement engendrée*) par une famille d'objets est la plus petite sous-catégorie pleine triangulée (resp. la plus petite sous-catégorie épaisse) contenant cette famille.

2.1.2. Catégories abéliennes. — Soit X une variété lisse. On sait, depuis Gabriel [23], que la catégorie des faisceaux cohérents X -coh sur X détermine X :

- l'application qui à un fermé associe les faisceaux supportés par ce fermé induit une bijection $Z \mapsto \mathcal{I}_Z$ de l'ensemble des fermés de X vers l'ensemble des sous-catégories de Serre de X -coh engendrées par un objet
- la catégorie quotient $X\text{-coh}/\mathcal{I}_Z$ est équivalente à $(X - Z)\text{-coh}$ et son centre s'identifie à $\mathcal{O}_X(X - Z)$.

Suivant Thomason et Balmer [3] (voir aussi [52, Theorem 3.11]), ce principe de reconstruction s'étend à la catégorie $D^b(X)$, si on munit celle-ci de sa structure tensorielle, en plus de sa structure triangulée :

– l’application qui à un fermé Z de X associe la sous-catégorie pleine $D_Z^b(X)$ de $D^b(X)$ des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont supportés par Z est injective, d’image l’ensemble des sous-catégories épaisses faiblement engendrées par un élément et $\otimes$ -idéales (*i.e.*, stables par $- \otimes L$ pour tout $L \in D^b(X)$) [58, Theorem 3.15]

– la catégorie $D^b(X - Z)$ s’identifie à $D^b(X)/D_Z^b(X)$ et, si $X - Z$ est un ouvert affine, le centre de $D^b(X - Z)$ s’identifie à $\mathcal{O}_X(X - Z)$.

Par conséquent, X -coh, vue comme catégorie abélienne, et $D^b(X)$, vue comme catégorie triangulée tensorielle, ne sont pas des invariants intéressants de X !

2.1.3. Fibré canonique (anti-)ample. — La catégorie $D^b(X)$, munie de sa seule structure de catégorie triangulée, ne détermine pas la variété X , mais elle apparaît comme un invariant intéressant. Dans la suite, les catégories dérivées seront considérées avec leur seule structure triangulée (voir à ce sujet § 3.1.4). Le premier exemple (Mukai) est celui de l’équivalence dérivée entre une variété abélienne et sa duale (théorème 3.11).

Bondal et Orlov démontrent que lorsque le fibré canonique ω_X est ample ou anti-ample, alors la variété est déterminée par sa catégorie dérivée [7, Theorem 2.5].

THÉORÈME 2.1 (Bondal-Orlov). — *Soit X une variété projective lisse telle que ω_X ou ω_X^{-1} est ample. Si Y est une variété projective lisse et si on a une équivalence de catégories triangulées $D^b(X\text{-coh}) \simeq D^b(Y\text{-coh})$, alors $X \simeq Y$.*

Un point crucial est joué dans la preuve par la notion de foncteur de Serre [5, § 3]. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie $\mathbf{C}$ -linéaire telle que $\dim \operatorname{Hom}(M, N) < \infty$ pour tous $M, N \in \mathcal{T}$. Un foncteur de Serre est la donnée d’une auto-équivalence $S : \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ et d’isomorphismes bifonctoriels pour tous $M, N \in \mathcal{T}$:

$$\operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(N, SM)^*.$$

Si on voit $\mathcal{T}$ comme une « algèbre avec plusieurs objets », alors ceci correspond à la notion d’algèbre de Frobenius.

Un foncteur de Serre, s’il existe, est unique à isomorphisme unique près. Par conséquent, une équivalence de catégories commute avec les foncteurs de Serre. En outre, si $\mathcal{T}$ est une catégorie triangulée, alors un foncteur de Serre est automatiquement triangulé.

La définition est motivée par la dualité de Serre :

THÉORÈME 2.2. — *Si X est une variété projective lisse purement de dimension n , alors $S = \omega_X[n] \otimes -$ est un foncteur de Serre pour $D^b(X)$.*

Démonstrations du théorème 2.1 (esquisses). — On se ramène facilement au cas où X et Y sont connexes (*cf.* proposition 2.4) et on fixe une équivalence $F : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$. On suppose ω_X ample (preuve identique dans l’autre cas). Le

théorème résulterait immédiatement de l'invariance des algèbres canoniques, si on savait que ω_Y était ample (cf. § 3.2.2).

– Première approche [7]. Sur une variété projective lisse connexe Z , pour tout point z et tout $i \in \mathbf{Z}$, les $C = \mathcal{O}_z[i] \in D^b(Z)^{(1)}$ vérifient

$$(2) \quad S(C) \simeq C[\dim Z], \operatorname{End}_{D^b(Z)}(C) = \mathbf{C} \text{ et } \operatorname{Hom}(C, C[i]) = 0 \text{ pour } i < 0.$$

Sur la variété X où ω_X est ample, les conditions (2) caractérisent les objets $\mathcal{O}_x[i]$ dans $D^b(X)$. On en déduit que l'ensemble $\{F(\mathcal{O}_x)[i]\}_{i,x}$ contient les $\mathcal{O}_y[j]$ pour $y \in Y$ et $j \in \mathbf{Z}$. Si $F(\mathcal{O}_x)$ n'est pas de cette forme, il est orthogonal aux $\mathcal{O}_y[j]$, donc il est nul. On déduit alors que F envoie tout $\mathcal{O}_x[i]$ sur un $\mathcal{O}_y[j]$ et ceci induit une bijection entre points de X et de Y . On caractérise ensuite les faisceaux inversibles décalés sur une variété lisse Z comme les $C \in D^b(Z)$ tels que pour tout $z \in Z$, il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_z[n]) \simeq \mathbf{C} \text{ et } \operatorname{Hom}(L, \mathcal{O}_z[i]) = 0 \text{ pour } i \neq n.$$

On en déduit que F envoie un faisceau inversible sur un faisceau inversible décalé. Soit $L \in \operatorname{Pic}(X)$. Quitte à décaler F , alors on peut supposer $F(L) \in \operatorname{Pic}(Y)$. L'algèbre $\bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Hom}(L, S^i(L)[-i \dim X])$ est isomorphe à l'algèbre canonique de X et les ouverts définis par ses éléments forment une base de la topologie de X . Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre définie de la même façon pour Y et elle donne donc une base de la topologie de Y . Ceci montre que ω_Y est ample et que les algèbres canoniques de X et Y sont isomorphes.

– Deuxième approche [25, § 4]. On commence comme ci-dessus par vérifier que les $\mathcal{O}_x[i]$ s'envoient sur des $\mathcal{O}_y[j]$. La suite de la preuve n'utilise plus que ω_X est ample. On utilise le théorème 3.7 plus bas qui affirme qu'il existe $K \in D^b(Y \times X)$ tel que $F = \Phi_K$. Alors, le lemme 3.1 plus bas montre que $Y \simeq X$.

– Troisième approche [52, § 3.2.4]. Soit $\mathcal{I}$ une sous-catégorie épaisse de $D^b(X)$. Si $\mathcal{I}$ est stable par $L^{-1} \otimes -$ pour un faisceau ample L , alors elle est $\otimes$ -idéale. Cette propriété est donc équivalente à la stabilité sous S^{-1} . Par conséquent, l'ensemble des fermés de X se retrouve à partir de $D^b(X)$ (à partir de sa seule structure triangulée). Pour tout fermé Z de Y , il existe donc un fermé Z' de X tel que $F(D_{Z'}^b(X)) = D_Z^b(Y)$. On montre que cette injection de l'ensemble des fermés de Y vers ceux de X se restreint en une bijection $Y \rightarrow X$ d'inverse continu. On identifie enfin les faisceaux d'anneaux.

□

Bondal et Orlov [7, Theorem 3.1] déterminent le groupe $\operatorname{Aut}(D^b(X))$ des classes d'isomorphisme d'auto-équivalences de $D^b(X)$ lorsque $\omega_X^\pm$ est ample (ceci est par exemple fourni par la deuxième preuve du théorème 2.1) :

$$\operatorname{Aut}(D^b(X)) = \operatorname{Pic}(X) \rtimes \operatorname{Aut}(X) \times \mathbf{Z}.$$

⁽¹⁾ $\mathcal{O}_z$ est le faisceau gratte-ciel en z