Séminaire BOURBAKI Juin 2005
57^{e} année, 2004-2005, n^{o} 947, p. 309 à 347

PREUVE DE LA CONJECTURE DE POINCARÉ EN DÉFORMANT LA MÉTRIQUE PAR LA COURBURE DE RICCI
[d'après G. Perel'man]

par **Gérard BESSON**

INTRODUCTION

Dans un article célèbre de 1904 ([48]), H. Poincaré pose la question qu'en termes actuels nous énonçons sous la forme de la conjecture suivante :

Conjecture 0.1. — *Si M est une variété compacte sans bord simplement connexe de dimension 3, alors M est homéomorphe à la sphère.*

En dimension 3, la conclusion équivalente est que M est difféomorphe à la sphère. De nombreux outils topologiques ont été élaborés afin de résoudre ce problème ; un historique de ces développements est décrit dans l'article [42]. Une preuve de la conjecture qui suit permettrait de compléter la compréhension des variétés de dimension 3, compactes, connexes de groupe fondamental fini :

Conjecture 0.2. — *Un groupe fini de difféomorphismes qui agit librement sur S^3 est conjugué à un sous-groupe du groupe d'isométries de la sphère canonique.*

En 1982, W. Thurston a replacé ces questions dans un cadre plus général, inspiré par la classification des surfaces. Reprenons l'énoncé de la conjecture dite de géométrisation tel qu'il est formulé dans [57].

Conjecture 0.3. — *L'intérieur de toute variété compacte de dimension 3 admet une décomposition canonique en pièces qui portent une structure géométrique.*

Je tiens à remercier chaleureusement L. Bessières pour le travail que nous avons fait en commun sur cette théorie durant deux ans et les nombreuses corrections apportées à ce texte, ainsi que B. Kleiner pour avoir répondu avec gentillesse à toutes nos questions et J-.P Bourguignon, J. Lott et S. Maillot pour leurs suggestions. Mes remerciements vont également à V. Bayle, M. Boileau, H.-D. Cao, B. Chow, É. Ghys, L. Guillou, J.-M. Iniotakis, B. Leeb (et tout le groupe de Münich), Ph. LeFloch, J. Porti, L. Rozoy, R. Souam et P. Topping pour des échanges fructueux.

Dans cet énoncé la variété peut avoir un bord. Dans la suite de ce rapport nous appellerons compacte une variété compacte sans bord (le terme fermée serait plus usuel en topologie) et toutes les variétés seront supposées orientées. La décomposition à laquelle il est fait allusion procède en deux étapes :

1) celle qui provient du théorème de Kneser dans lequel la variété est décomposée en une somme connexe d'un nombre fini de variétés premières. On rappelle qu'une variété M est dite première si $M = P\#Q$ implique $P = S^3$ ou $Q = S^3$.

2) Celle qui provient des travaux de K. Johannson et de W. Jaco et P. Shalen et qui consiste à découper le long de tores incompressibles. La conjecture affirme que ceci peut être fait en sorte que les variétés à bords qui en résultent possèdent une géométrie, c'est-à-dire une métrique riemannienne complète localement homogène. Celles-ci sont classifiées, il y a huit possibilités (en dimension 3). Le lecteur trouvera une intéressante discussion de cette conjecture ainsi que des références précises dans [57] et [1].

Un des avantages de la conjecture 0.3 est qu'elle fait référence à l'existence de métriques riemanniennes privilégiées, sur certaines régions de la variété étudiée, et fournit ainsi des outils supplémentaires, au-delà de la topologie. En 1982, R. Hamilton a introduit une méthode, que nous pouvons qualifier d'analytique, dans le but d'aborder ces questions. Il s'agit d'étudier une équation différentielle sur l'espace des métriques riemanniennes, nous dirons un flot, dont les solutions sont une déformation d'une métrique quelconque qui tend à la rendre de courbure constante. L'équation met en jeu la courbure de Ricci, qui est une notion de courbure de même nature que la métrique, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique sur chaque espace tangent. L'équation est :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}\,,$$

où $g(t)$ désigne la métrique riemannienne qui évolue et $\mathrm{Ric}_{g(t)}$ sa courbure de Ricci. L'équation ci-dessus est inspirée par la tentative de minimiser l'intégrale de la courbure scalaire dont ce n'est toutefois pas le flot de l'opposé du gradient ; elle est également liée à l'équation d'évolution associée aux applications harmoniques. Le signe négatif montre que la courbure positive est contractée et la courbure négative est dilatée, comme on peut s'en convaincre sur les exemples de courbure constante. Remarquons que, si la donnée initiale admet des isométries, c'est le cas pour la solution, pour tout temps de son intervalle de vie. En d'autres termes, le groupe d'isométries ne peut que croître.

Dans une série d'articles ([24], [25], [31], [29], [19], [26], [27], [28] et [30]), R. Hamilton développe les outils d'analyse nécessaires à l'utilisation de sa méthode et obtient de remarquables résultats géométriques, dont certains sont des réponses aux questions posées ci-dessus, dans des cas particuliers. De nombreuses difficultés persistent toutefois, en particulier celles liées à l'étude des singularités qui peuvent apparaître lors de l'évolution.

Récemment, G. Perel'man a déposé sur la Toile trois articles, [44], [46] et [45] dans lesquels une solution complète de la conjecture 0.3 est proposée. Ils apportent des idées novatrices et puissantes à la méthode du flot de la courbure de Ricci, et surtout à la description des régions qui deviennent singulières, c'est-à-dire où la courbure explose. Ceci permet de pratiquer une chirurgie, déjà en grande partie décrite dans [25], de manière efficace. On construit ainsi un flot défini pour tout temps mais pas de classe C^∞, les singularités correspondant à des temps de chirurgies. Il se peut même que la variété disparaisse à un moment de l'évolution, on dit alors qu'elle s'éteint en temps fini. Les articles ne sont pas très détaillés, il s'agit plutôt d'esquisses de preuve, néanmoins assez claires. Ils font l'objet d'un intense travail de mise en place et de vérifications des détails (et d'exégèse). L'expertise n'étant pas complètement terminée, il est difficile de se prononcer pour l'instant (au moment où ces lignes sont écrites) sur la question de savoir si la conjecture 0.3 est prouvée. Toutefois, le cas de la conjecture de Poincaré est plus « simple » dans le schéma de G. Perel'man ; il montre, en effet, que, pour n'importe quelle métrique sur une variété compacte simplement connexe, le flot s'éteint en temps fini ([45]). Une conséquence est qu'on ne pratique qu'un nombre fini de chirurgies. L'auteur du présent texte est convaincu que les conjectures 0.1 et 0.2 sont prouvées.

Le but de ce rapport est de décrire les outils d'analyse et de géométrie nécessaires ainsi que le schéma de la preuve des conjectures 0.1 et 0.2. Il est conçu comme intermédiaire entre les survols [1], [39], [42] et [43] et les notes détaillées [36], [51] et [61]. L'auteur espère qu'il peut être un guide de lecture de ces documents. Les premières notes détaillées produites ont été celles de B. Kleiner et J. Lott, nous les conseillons vivement à tous ceux qui souhaitent comprendre les travaux de G. Perel'man ; de même les documents [51] et [61] sont d'une grande précision sur de nombreux points de [44]. Ce texte est écrit alors que l'auteur travaille encore à améliorer sa compréhension de cet ensemble de travaux ; il contient certainement des erreurs qui seront expurgées dans des versions ultérieures, déposées sur le site de l'Institut Fourier(1). Signalons enfin les articles [47] et [2] qui s'adressent à un large public et sont d'une grande utilité.

1. DES MODÈLES JOUETS

Il existe deux modèles qui permettent de mieux se familiariser avec les rudiments concernant les équations d'évolution géométriques. Il s'agit du raccourcissement des courbes et du flot de la courbure sur les surfaces. Ce sont des jouets déjà assez sophistiqués que nous décrivons très brièvement.

(1) http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/GT/perelman/index.html

1.1. Le raccourcissement des courbes

Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane fermée simple paramétrée par une fonction de classe C^∞, $F_0 : S^1 \to \mathbf{R}^2$; on la suppose orientée positivement. Pour $T > 0$, on cherche une famille $F : S^1 \times [0,T) \to \mathbf{R}^2$ de classe C^∞ en ses deux variables vérifiant l'équation d'évolution suivante :

$$(*_c) \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) = k(x,t)\vec{N}(x,t) \\ F(\cdot,0) = F_0 \end{cases}$$

où $\vec{N}(x,t)$ (resp. $k(x,t)$) est le vecteur normal intérieur (resp. la courbure) de la courbe $F_t(\cdot) = F(\cdot,t)$ au point $F(x,t)$.

Cette équation est non linéaire car k et N dépendent de F (voir la section 3). Il est facile de vérifier qu'il s'agit ici du flot de l'opposé du gradient de la fonctionnelle longueur ; un calcul immédiat montre que l'aire $A(t)$ enclose par la courbe F_t (l'aire de la composante connexe bornée) vérifie $A'(t) = -2\pi$. Le théorème principal est dû à M. Gage et R. Hamilton [19] pour le cas où $\mathcal{C}$ est convexe et à M. Grayson [21] pour le cas général. Afin d'énoncer ces résultats (en un seul théorème) définissons les quantités $k_{\max}(t) = \max\{k(x,t); x \in S^1\}$ et, de même, $k_{\min}(t)$ comme minimum de la courbure au temps t, ainsi que $r_{\max}(t) =$ rayon du cercle circonscrit à F_t et, de même, $r_{\min}(t)$ comme le rayon du cercle inscrit dans F_t.

Théorème 1.1 ([19] et [21]). — *Pour toute courbe C^∞ fermée simple il existe une unique solution de l'équation $(*_c)$ définie sur un intervalle de temps $[0,T)$ où $T = A(0)/2\pi$. La famille de courbe F_t converge, lorsque $t \to T$, vers un point et devient circulaire aux sens suivants :*

i) *le quotient $k_{\max}/k_{\min}$ tend vers 1 lorsque t tend vers T,*
ii) *le quotient $r_{\max}/r_{\min}$ tend vers 1 lorsque t tend vers T.*

De plus, pour tout $n \geq 1$, la dérivée spatiale n-ième de k converge uniformément vers 0 lorsque t tend vers T. Enfin, si la courbe $\mathcal{C}$ est convexe elle le reste tout au long du processus ([19]) *et si $\mathcal{C}$ n'est pas convexe la courbe F_t le devient en un temps $t < T$* ([21]).

Ce théorème affirme en fait que, quitte à renormaliser afin que l'aire intérieure soit constante, la famille F_t converge dans la topologie C^k, pour tout k, vers un cercle.

Questions :

1) Si la courbe de départ est convexe, alors F_t reste dans son intérieur pour tout t. En particulier le point limite est dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{C}$. Il serait intéressant de déterminer sa position.

2) Ce théorème nécessite une courbe initiale régulière. Que se passe-t-il si $\mathcal{C}$ possède des coins ? Dans [19] il est fait allusion à une solution possible.

3) Une extension aux corps convexes de $\mathbf{R}^n$ est décrite dans [33].

1.2. Le flot de la courbure sur les surfaces

On munit une surface abstraite compacte et orientable Σ d'une métrique riemannienne notée g_0. Dans la classe conforme de g_0 il existe une métrique de courbure constante (unique à isométrie près). On souhaite, comme précédemment, obtenir cette « forme » idéale comme limite d'un flot géométrique. Si g(t) est une famille C^∞ de métriques riemanniennes sur Σ, dépendant de manière C^∞ du paramètre t, on note $R(x,t)$ la courbure scalaire de $g(t)$ au point $x \in \Sigma$; avec les conventions habituelles, la courbure scalaire est le double de la courbure de Gauß. La mesure riemannienne, notée $v_{g(t)}$ (ou dvol), permet de définir le volume de $(\Sigma, g(t))$ et la quantité $r(t) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Sigma, g(t))} \int_\Sigma R(x,t) dv_{g(t)}$. On considère l'équation suivante :

$$(*_s) \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} & = (r - R)g \\ g(0) & = g_0\,. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que le volume est constant en temps pour toute solution ; c'est donc une version normalisée du flot de la courbure que nous considérons. On peut également s'assurer immédiatement que toute solution $g(t)$ est conforme à g_0, pour tout $t \geq 0$. Le résultat ci-dessous est prouvé en combinant [26] et [11].

Théorème 1.2 ([26] et [11]). — *Soit* (Σ, g_0) *une surface riemannienne de classe* C^∞ *; le problème* $(*_s)$ *admet une solution unique définie pour* $t \in [0, +\infty)$*. La famille de métriques* $g(t)$ *converge dans la topologie* C^k*, pour tout* k*, lorsque* t *tend vers* $+\infty$*, vers une métrique de courbure constante conforme à* g_0*.*

Ce théorème peut être vu comme une nouvelle preuve de l'uniformisation des surfaces compactes. C'est le cas pour toutes les surfaces de caractéristique d'Euler négative ou nulle. Pour la sphère une étape de la preuve utilisait la structure complexe et ce n'est que récemment que ce problème fut résolu, dans [9], conduisant ainsi à une nouvelle preuve complète de l'uniformisation en dimension 2.

Dans le cas où la courbure est strictement négative, la preuve de la convergence est immédiate. Il serait alors intéressant d'avoir un procédé ou un algorithme simple permettant de munir une surface de caractéristique d'Euler négative (strictement) d'une métrique de courbure négative. Le flot donnerait, alors, une métrique de courbure constante de manière rapide (cette question a été posée à l'auteur par É. Ghys).

Le cas des orbifolds de dimension 2 est particulièrement instructif. Il est traité dans les articles [15], [60] et [10]. Les orbifolds compactes en dimension 2 sont classées en deux catégories (voir [50] ou [56]) : les « bonnes » (good) orbifolds qui admettent une métrique de courbure constante et les « mauvaises » (bad) orbifolds qui n'en admettent pas. Pour ces dernières, on montre que le flot $(*_s)$ converge vers un soliton de Ricci (voir [59]). La preuve du théorème 1.2 contient une étape dans laquelle on montre que les seuls solitons sur S^2 sont constants (en temps) égaux à une métrique de courbure constante (voir [13], théorème 5.21).