Séminaire BOURBAKI Juin 2005
57^e année, 2004-2005, n^o 949, p. 379 à 413

ALGÈBRES SIMPLES CENTRALES SUR LES CORPS DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES [d'après A. J. de Jong]

par **Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE**

1. INTRODUCTION

À toute algèbre simple centrale A de dimension finie sur un corps F sont associés deux entiers, l'indice et l'exposant. L'indice de A est le minimum des degrés $[E : F]$, où E parcourt les corps, extensions finies de F, pour lesquels la E-algèbre $A \otimes_F E$ est isomorphe à une algèbre de matrices. L'exposant de A est l'ordre de la classe de A dans le groupe de Brauer du corps F. L'exposant divise l'indice, mais ne lui est pas nécessairement égal. Lorsque F est un corps de nombres, c'est un théorème des années 1930 qu'exposant et indice coïncident ([BHN]). A. J. de Jong [**?**] montre qu'ils coïncident aussi lorsque F est un corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes.

Au § 1 de cet exposé, on trouvera des rappels sur les algèbres simples centrales sur un corps, le groupe de Brauer, les extensions de ces notions au-dessus d'un schéma. On passe en revue les propriétés connues des corps de déploiement des algèbres simples centrales et on cite plusieurs problèmes ouverts dans cette direction, particulièrement en ce qui concerne la relation entre exposant et indice.

Le § 2 décrit l'essentiel de la démonstration de de Jong, qui passe par des déformations d'algèbres d'Azumaya sur une surface, rendues possibles par des transformations élémentaires. On décrit la démonstration « simplifiée » évoquée à la fin de l'article de de Jong. Cette démonstration requiert un bon théorème de type Bertini pour démarrer, mais elle évite les études fines de variétés singulières de [**?**].

Le manque de temps, de place, et de compétence nous ont fait renoncer à décrire la nouvelle et très intéressante preuve, par Lieblich [Lie], du théorème de de Jong dans le cas non ramifié. Cette preuve, qui se place dans le cadre des champs algébriques, s'appuie sur le théorème de Graber, Harris, Starr et de Jong ([GHS], [dJS1]) selon lequel une variété (séparablement) rationnellement connexe sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos a un point rationnel. Il est par ailleurs trop tôt pour parler d'une troisième démonstration, annoncée par de Jong et Starr, et qui s'inscrit dans l'étude toute nouvelle des variétés 1-rationnellement connexes.

Au § 3, on donne une liste de propriétés des groupes algébriques linéaires sur un corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes que la coïncidence entre exposant et indice permet d'obtenir.

Les corps de fonctions de deux variables sur le corps des complexes sont de dimension cohomologique 2. Au § 4, on discute divers résultats récents sur des corps qui sont de dimension cohomologique 3, à savoir les corps de fonctions d'une variable sur un corps p-adique.

Pour de nombreuses discussions sur le travail de de Jong, je remercie M. Ojanguren et R. Parimala. Je me suis en particulier fortement inspiré d'un cours donné par cette dernière à Lens en juin 2004. Je remercie O. Gabber, P. Gille, B. Kahn, T. Szamuely et tout particulièrement L. Moret-Bailly pour leurs critiques d'une première version du présent texte.

2. LA THÉORIE CLASSIQUE

2.1. Algèbres simples centrales sur un corps ([A], [D], [Bki], [Bld], [GSz])

Soient k un corps et V un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. La k-algèbre $\mathrm{End}(V)$ satisfait les propriétés suivantes :

(a) Elle est de dimension finie, n^2, sur k.

(b) Son centre est k.

(c) Elle ne possède pas d'idéal bilatère non trivial.

Par le choix d'une base de V, $\mathrm{End}_k(V)$ s'identifie à l'algèbre $M_n(k)$ des matrices carrées de dimension n sur le corps k.

Une k-algèbre simple centrale est une forme tordue d'une telle algèbre. Plus précisément :

Définition 2.1. — *Une k-algèbre simple centrale est une k-algèbre de dimension finie, de centre réduit à k, sans idéal bilatère non trivial.*

Pour une k-algèbre A, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est une k-algèbre simple centrale.

(ii) Il existe un corps K contenant k tel que la K-algèbre $A \otimes_k K$ soit simple centrale.

(iii) Pour tout corps K contenant k, la K-algèbre $A \otimes_k K$ est simple centrale.

(iv) Il existe un corps K contenant k et un entier $n \geqslant 1$ tels que la K-algèbre $A \otimes_k K$ soit K-isomorphe à une K-algèbre $M_n(K)$.

(v) Il existe un corps K extension finie séparable de k et un entier $n \geqslant 1$ tels que la K-algèbre $A \otimes_k K$ soit K-isomorphe à une K-algèbre $M_n(K)$.

Ceci implique en particulier que la dimension de A sur k est un carré, soit n^2. L'entier n est appelé le *degré* de A (sur k).

Un corps K comme en (iv) est dit *corps de déploiement* de l'algèbre A. D'après (v), une clôture séparable de k est un corps de déploiement de A.

D'après Wedderburn, toute k-algèbre simple centrale A est isomorphe à une k-algèbre de matrices $M_r(D)$, où D est simple centrale à division, c'est-à-dire que c'est un corps gauche de centre k (on emploiera indifféremment l'une ou l'autre terminologie). Un tel corps gauche D est déterminé, comme k-algèbre, à isomorphisme non unique près.

Le degré de D sur k est appelé l'*indice* de A (sur k). Il est noté $\mathrm{ind}_k(A) = \mathrm{ind}_k(D)$.

Soit A une k-algèbre simple centrale de degré n. Pour tout entier m avec $1 \leqslant m \leqslant n$ on peut considérer la k-variété algébrique dont les points sur une clôture séparable k_s de k sont les idéaux à droite de $A \otimes_k k_s$ de k_s-dimension mn. On note cette variété $SB(A, m)$. La k-variété $SB(A, 1)$ est la variété de Severi-Brauer associée par F. Châtelet à la k-algèbre simple centrale A. On a les faits suivants ([Blt]). La k-variété $SB(A, m)$ est une forme de la grassmannienne $\mathrm{Grass}(m, n)$. La k-variété $SB(A, m)$ possède un k-point si et seulement $\mathrm{ind}_k(A)$ divise m. Ainsi l'indice $\mathrm{ind}_k(A)$ est le plus petit entier m tel que la k-variété $SB(A, m)$ possède un k-point. C'est aussi le p.g.c.d. des entiers m satisfaisant cette propriété.

Pour $A = M_r(D)$ comme ci-dessus, et K un corps contenant k, de degré fini sur k, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Être k-isomorphe à un sous-corps commutatif maximal de D.

(ii) Être de degré minimal sur k parmi toutes les extensions finies de k déployant A.

Les sous-corps commutatifs maximaux de D sont tous de degré $\mathrm{ind}_k(D)$. Il existe de tels sous-corps qui sont séparables sur k.

L'indice $\mathrm{ind}_k(A)$ d'une k-algèbre simple centrale A peut donc aussi se définir comme le degré commun des corps satisfaisant l'une des propriétés ci-dessus. C'est aussi le p.g.c.d. des degrés $[K : k]$ des extensions finies de corps K/k déployant D.

Une k-algèbre simple centrale à division D/k de degré $n = \prod_i p_i^{n_i}$ avec les p_i premiers distincts s'écrit comme un produit tensoriel $D = D_1 \otimes_k \cdots \otimes_k D_n$, chaque D_i étant un corps gauche de degré $p_i^{n_i}$.

Rappelons la notion d'algèbre cyclique. Soit K/k une extension finie cyclique du corps k, de degré n, soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(K/k)$ et soit $b \in k^*$. On munit le k-vectoriel $\oplus_{i=0}^{n-1} K.Y^i$ d'une structure de k-algèbre simple centrale par les relations $Y^n = b$ et $Yx = \sigma(x)Y$ pour $x \in K$. On note $A = (K/k, \sigma, b)$ cette k-algèbre. Lorsque k contient une racine n-ième de 1, soit ζ_n, on peut écrire $K = k(\alpha)$ avec $\alpha^n = a \in k^*$. Soit σ tel que $\sigma(\alpha) = \zeta_n \alpha$. On note alors $A = (a, b)_{\zeta_n}$. Cette k-algèbre, considérée par Dickson, est engendrée par deux éléments X et Y soumis aux relations $X^n = a$, $Y^n = b$, $YX = \zeta_n XY$.

Pour $n = 2$, on retrouve la définition des algèbres de quaternions (a, b).

2.2. Groupe de Brauer d'un corps ([A], [Bki], [GSz], [S2])

Soient A et B deux k-algèbres simples centrales. Le produit tensoriel $A \otimes_k B$ est une k-algèbre simple centrale. Étant donnée une k-algèbre simple centrale A, on dispose de l'algèbre opposée A^{op}, et l'homomorphisme $A \otimes_k A^{op} \to \mathrm{End}_{k-\mathrm{vect}}(A)$ qui à $a \otimes b$ associe $x \mapsto axb$ est un isomorphisme de k-algèbres. Considérons l'ensemble des classes d'isomorphie de k-algèbres simples centrales. Si l'on introduit la relation d'équivalence « L'algèbre A est équivalente à l'algèbre B s'il existe des entiers r, s avec $M_r(A) \simeq M_s(B)$ », on voit que le produit tensoriel induit sur les classes d'équivalence une structure de groupe abélien, dont l'élément neutre est la classe des algèbres $M_n(k)$ (n arbitraire). C'est le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$ du corps k.

Notons $\mathrm{Az}_n(k)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de k-algèbres simples centrales de degré n. On dispose d'une application naturelle $\mathrm{Az}_n(k) \to \mathrm{Br}(k)$. Cette application est une injection : si deux k-algèbres simples centrales A et B de même degré ont même classe dans le groupe de Brauer, elles sont isomorphes. On a donc :

$$\mathrm{Br}(k) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Az}_n(k),$$

la loi de groupe étant induite par les produits tensoriels

$$\mathrm{Az}_n(k) \times \mathrm{Az}_m(k) \longrightarrow \mathrm{Az}_{nm}(k).$$

On a une seconde définition du groupe de Brauer du corps k ([S1]). On note k_s une clôture séparable de k, g le groupe de Galois de k_s sur k. Alors

$$\mathrm{Br}(k) = H^2(g, k_s^*).$$

On passe de l'une à l'autre définition en utilisant la cohomologie galoisienne de la suite exacte de k-groupes lisses :

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k} \longrightarrow GL_{n,k} \longrightarrow PGL_{n,k} \longrightarrow 1.$$

L'ensemble pointé de cohomologie galoisienne $H^1(k, PGL_n) = H^1(g, PGL_n(k_s))$ est en bijection avec $\mathrm{Az}_n(k)$ ([S1], Chap. X, § 4 et § 5).

Une k-algèbre simple centrale A est déployée, c'est-à-dire k-isomorphe à une algèbre de matrices sur k, si et seulement si sa classe $\alpha = [A] \in \mathrm{Br}(k)$ est nulle. Ainsi la K-algèbre $A \otimes_k K$ est déployée si et seulement si $\alpha_K = 0 \in \mathrm{Br}(K)$.

L'*indice* $\mathrm{ind}_k(A)$ d'une k-algèbre simple centrale A ne dépend que de la classe $\alpha = [A]$ de A dans $\mathrm{Br}(k)$. Cet entier qu'on peut donc noter $\mathrm{ind}_k(\alpha)$ est donc

(i) le plus petit degré d'une extension finie (séparable) de corps K/k telle que l'on ait $\alpha_K = 0 \in \mathrm{Br}(K)$;

(ii) le p.g.c.d. des degrés des extensions finies de corps K/k (séparables) telles que l'on ait $\alpha_K = 0 \in \mathrm{Br}(K)$.

On définit par ailleurs l'*exposant* d'une k-algèbre simple centrale A comme l'exposant de $\alpha = [A]$ dans le groupe de Brauer de k.

On utilise traditionnellement le mot « exposant » (ou parfois « période ») plutôt que le mot « ordre » pour éviter la confusion avec les ordres (maximaux ou autres) lorsque le corps k est le corps des fractions d'un anneau.

PROPOSITION 2.2 (R. Brauer)

(i) *L'exposant divise l'indice.*

(ii) *Les nombres premiers qui divisent l'indice divisent l'exposant.*

Preuve. — Le premier énoncé résulte de l'existence, pour une extension finie de corps K/k, d'un homomorphisme de corestriction $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(k)$ pour lequel la composition avec la restriction $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)$ est la multiplication par le degré $[K : k]$.

Montrons le second énoncé. Soit l premier ne divisant pas l'exposant de A. Soit K/k une extension finie galoisienne déployant A. Soit $F \subset K$ le corps fixe d'un l-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Gal}(K/k)$. L'exposant de $[A \otimes_k F] \in \mathrm{Br}(F)$ divise celui de $[A] \in \mathrm{Br}(k)$, il est donc premier à l. Par ailleurs la restriction de $A \otimes_k F$ à K est triviale, l'argument de corestriction montre que la classe $[A \otimes_k F] \in \mathrm{Br}(F)$ est annulée par $[K : F]$ qui est une puissance de l. Ainsi $[A \otimes_k F] = 0 \in \mathrm{Br}(F)$, la k-algèbre A est déployée par l'extension F/k qui est de degré premier à l. Ainsi l ne divise pas l'indice. □

2.3. Algèbres d'Azumaya, cohomologie étale, ramification ([Gr], [Mi])

Nous nous contenterons ici de rappeler quelques résultats. Pour les démonstrations, on renvoie aux trois exposés de Grothendieck [Gr] et au chapitre IV du livre de Milne [Mi].

Soit X un schéma. Une algèbre d'Azumaya sur X de degré n est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres localement libres de rang fini qui localement pour la topologie étale sur X est isomorphe à $M_n(\mathcal{O}_X)$.

Soit A une telle algèbre. À tout entier m avec $1 \leqslant m \leqslant n$ on associe un X-schéma $SB(A, m)$. C'est le schéma des $\mathcal{O}_X$-idéaux à droite de A qui sont localement libres de rang mn sur X et qui sont localement facteurs directs dans A. C'est un X-schéma projectif, lisse, à fibres connexes. Pour $m = 1$, c'est le schéma de Severi-Brauer ([Gr]) associé à A.

On notera $\mathrm{Az}_n(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'algèbres d'Azumaya sur X de degré n. Le produit tensoriel de telles $\mathcal{O}_X$-algèbres induit un produit

$$\mathrm{Az}_n(X) \times \mathrm{Az}_m(X) \longrightarrow \mathrm{Az}_{n+m}(X).$$

Si l'on considère l'application induite sur les classes d'isomorphie, et que de plus on considère comme triviales les algèbres de la forme $\mathcal{E}nd(V)$ pour V un fibré vectoriel