Séminaire BOURBAKI Juin 2005
57^{e} année, 2004-2005, n^{o} 950, p. 415 à 468

GÉOMÉTRIE CONFORME EN DIMENSION 4 : CE QUE L'ANALYSE NOUS APPREND

par **Christophe MARGERIN**

INTRODUCTION

Si toute variété différentielle admet une structure riemannienne – les métriques sur une variété forment un cône de dimension infinie –, on sait que certaines propriétés algébriques de la courbure de la connexion riemannienne se traduisent dans la topologie sous-jacente : restrictions sur le type homologique (théorèmes d'annulation), homotopique, topologique, voire différentiel. Toute variété riemannienne complète de courbure sectionnelle négative ou nulle est ainsi revêtue par $\mathbb{R}^n$ (théorème de Cartan-Hadamard) et toute variété orientable de dimension paire compacte et de courbure sectionnelle strictement positive est aussi simplement connexe (théorème de Synge). Dans une logique de classification topologique par « géométrisation », on cherche à affaiblir la caractérisation métrique obtenue : s'il est facile de se convaincre qu'une variété – que l'on supposera simplement connexe en dimension impaire – de courbure sectionnelle constante et strictement positive est une sphère, le fait qu'il en aille de même en dimension 3 de toute variété de courbure de Ricci strictement positive – un résultat aujourd'hui classique, dû à R. Hamilton – doit être considéré comme un « vrai » résultat de géométrisation.

Une autre façon d'affaiblir une hypothèse de courbure consiste, au lieu de prendre une trace « algébrique » de l'invariant, comme dans l'exemple précédent où l'on passe de la courbure de Riemann à la courbure de Ricci, à considérer l'hypothèse « en moyenne » sur la variété : grâce à la formule de Gauss-Bonnet on peut en dimension 2 remplacer dans la caractérisation précédente de la sphère le signe de la courbure (de Gauss dans ce cas) par celui de son intégrale (pour la mesure canoniquement associée à la métrique).

Le formalisme de Chern-Weil généralise à la dimension supérieure cette belle formule en donnant des expressions des nombres caractéristiques en termes d'intégrales de traces de polynômes en la courbure, mais les caractérisations de types topologiques ou différentiels en termes de propriétés « en moyenne » de la courbure sont rares. D'où l'intérêt de l'énoncé suivant, particulièrement satisfaisant.

Théorème 1 ([CGY3]). — *Toute variété différentiable de dimension* 4, *compacte et sans bord, admettant une métrique de courbure scalaire strictement positive et dont la norme L^2 de la courbure de Weyl et la caractéristique d'Euler sont reliées par la relation*

$$\int_M |W|^2 d\mathrm{vol} < 16\pi^2 \chi(M)$$

est difféomorphe à S^4 ou à $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$.

Comme nous l'expliquons dans le préliminaire, cet énoncé est une version L^2 de la caractérisation de la sphère standard en terme du pincement faible – un invariant suffisamment « faible » pour autoriser en tout point des courbures sectionnelles négatives – établie dans [M].

La preuve de Chang S.-Y. A., M. Gursky et Yang P. consiste d'ailleurs à réduire leur énoncé à celle-ci en construisant dans la classe conforme d'une métrique vérifiant les hypothèses du théorème 1 une métrique $1/6$ - faiblement pincée, l'hypothèse de [M].

La caractérisation donnée dans [M] est optimale, et on y établit la classification des géométries limites. Ce théorème de rigidité admet lui aussi une version L^2.

Théorème 2 ([CGY3]). — *Toute variété différentiable de dimension* 4, *compacte et sans bord, admettant une métrique de courbure scalaire strictement positive et dont la norme L^2 de la courbure de Weyl et la caractéristique d'Euler sont reliées par la relation*

$$\int |W|^2 d\mathrm{vol} \leqslant 16\pi^2 \chi(M)$$

est soit difféomorphe à S^4 ou à $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, soit conformément équivalente au plan projectif complexe ($\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, F-S) ou à un quotient du produit $\mathbb{R} \times (S^3, \mathrm{can})$ par un sous-groupe d'isométries.

Dans cet exposé nous ne reviendrons pas sur la preuve de l'énoncé « géométrique », [M], obtenue par l'étude de l'invariant « pincement faible » le long des courbes intégrales de la courbure de Ricci considérée comme champ de vecteurs sur l'espace des métriques. Ces idées ont été remises au goût du jour par le travail de G. Perelman en dimension 3 ; elles joueront d'ailleurs un rôle en un point crucial de l'argument, mais sous le mode mineur de flot de Yamabe.

Nous allons plutôt présenter l'ensemble des résultats de géométrie conforme de la dimension 4 qui ont permis aux auteurs de réduire leurs énoncés à ceux établis dans [M] : un travail technique de longue haleine, des premiers papiers sur les métriques extrémales pour les déterminants régularisés – en particulier [CY] – à ceux, plus récents, où ils étudient un analogue du problème de Yamabe pour un invariant scalaire *quadratique* en la courbure de Ricci ([CGY1], [CGY2]), en passant par une étude systématique des « paires conformes » – et en particulier de « l'opérateur de Paneitz » et de sa « Q-courbure ».

1. PRÉLIMINAIRE : UNE PREMIÈRE RÉDUCTION

La courbure riemannienne est un 4-tenseur présentant un certain nombre de symétries qui font qu'elle peut être considérée comme une section du fibré des endomorphismes symétriques de la puissance extérieure seconde du cotangent. Elle vérifie de plus la première identité de Bianchi, qui exprime son orthogonalité à la puissance extérieure quatrième du cotangent. Aux deux (seules) traces de la courbure de Riemann, la courbure de Ricci, $\mathrm{ric} = \mathrm{tr}_{24}R$, et la courbure scalaire, $\mathrm{scal} = \mathrm{tr}\,\mathrm{ric}$, correspondent deux composantes irréductibles de l'algèbre de courbure sous l'action du groupe orthogonal, de dimensions respectives $(n^2+n-2)/2$ $(=\dim S^2T^*M - 1)$ et 1 ; la projection sur la première est donnée par $\sigma = 1/2n(n-1)\,\mathrm{scal}\; g \circledast g$, et l'autre par $\rho_0 = 1/(n-2)\;\mathrm{ric}_0 \circledast g$ où $\mathrm{ric}_0 = \mathrm{ric} - 1/n\,\mathrm{scal}\; g$ représente la partie sans trace de la courbure de Ricci et $\circledast$ une suspension algébrique de S^2T^*M dans $S^2\Lambda^2T^*M$ parfois appelée produit de Kulkarni. Ce qui reste, $W := R - \frac{\mathrm{scal}}{2n(n-1)} g \circledast g - \frac{\mathrm{ric}_0 \circledast g}{n-2}$ est appelé courbure de Weyl et représente la projection de la courbure de Riemann, R, sur la dernière composante irréductible, celle des tenseurs de courbure dont toutes les traces s'annulent. Réduite à 0 en dimension 2 et 3, c'est la plus grande composante (en terme de dimension) dès la dimension 4.

Cette composante admet une décomposition exceptionnelle sous l'action de $\mathrm{SO}(n)$ en dimension $n=4$, associée à l'action de l'opérateur de Hodge et correspondant à la décomposition $\underline{so}(4) = \underline{so}(3) \oplus \underline{so}(3)$. Ce raffinement joue un rôle crucial dans [M], et interviendra ici dans la discussion de la classification des métriques plates au sens de Bach, (cf. le paragraphe 4.2.2, en particulier l'identité (4.27) du Lemme 4.3), par laquelle passe la démonstration du résultat de rigidité énoncé dans le théorème 2.

On vérifie facilement que la courbure de Weyl est un covariant conforme : $W(e^{2f}g) = e^{2f}W(g)$. L'intégrale $\int_M |W|^2 d\mathrm{vol}$ est en particulier un invariant, et le théorème 1 donne donc une caractérisation *conforme* et *intégrale* de la sphère standard.

Rappelons que la généralisation due à Chern S.S. de la formule de Gauss-Bonnet s'énonçant, en dimension 4,

$$32\pi^2\,\chi(M) = \int_M \left(|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 + |W|^2\right) d\mathrm{vol}\,, \tag{1.1}$$

les hypothèses des théorèmes 1 (2) se lisent donc, respectivement,

$$\int_M \left(|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2\right) d\mathrm{vol} > (\geqslant)\ 0. \tag{1.2}$$

Le pincement faible étant défini par (cf. [M])

$$PF = \sup_M \frac{|R-\sigma|^2}{\mathrm{scal}^2} \ ,$$

et la décomposition de la courbure rappelée ci-dessus étant orthogonale, l'hypothèse de [M], PF $< (\leqslant)\ 1/6$ s'écrit donc

$$|R-\sigma|^2 = |\rho_0|^2 + |W|^2 < (\leqslant) \frac{\mathrm{scal}^2}{6} = |\sigma|^2 \ ,$$

ce qui revient à la positivité de l'intégrand dans l'intégrale (1.2) : les théorèmes 1 et 2 sont bien une version « L^2 » de [M], et il suffira pour les établir de démontrer l'existence d'une métrique dont le polynôme de courbure $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2 = \frac{\mathrm{scal}^2}{6} - 2|\mathrm{ric}_0|^2 - |W|^2$ est partout (strictement) positif dans la classe conforme de toute métrique de courbure scalaire strictement positive satisfaisant l'hypothèse intégrale (1.2).

Il existe une combinaison de la courbure de Ricci et de la courbure scalaire particulièrement pertinente en dimension 4, $A := \mathrm{ric} - \frac{\mathrm{scal}}{6} g = \mathrm{ric}_0 + \frac{\mathrm{scal}}{12} g$, appelée *courbure de Schouten*, et en terme de laquelle la décomposition précédente du tenseur de Riemann s'écrit $R = \frac{1}{2} A \circledast g + W$. Exprimé avec la courbure de Schouten, la positivité du polynôme $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2$ est encore équivalente à celle du polynôme $4\,\sigma_2(A) - |W|^2$, où $\sigma_2(A)$ représente la seconde fonction symétrique élémentaire de l'endomorphisme symétrique A. Notons qu'en terme de cette fonction la formule de Chern-Gauss-Bonnet (1.1) admet la forme simple suivante

$$32\pi^2\, \chi(M) = \int_M (4\sigma_2(A) + |W|^2)\, d\mathrm{vol} \ , \tag{1.3}$$

qui nous permet de déduire de l'invariance conforme de $\int_M |W|^2\, d\mathrm{vol}$ celle de l'intégrale $\int_M \sigma_2(A)\, d\mathrm{vol}$, bien que $\sigma_2(A)$ ne soit pas lui-même un covariant conforme. Cette remarque élémentaire est essentielle à la compréhension de la stratégie adoptée.

Dans une première partie, (le chapitre 2), nous établissons la réduction annoncée dans le cas où la norme L^2 de la courbure de Weyl est *strictement* majorée par $4\pi\sqrt{\chi(M)}$ – et donc le théorème 1. Nous commençons par une preuve dans l'esprit de celle proposée par les auteurs, qui a le mérite de préciser comment des préoccupations essentiellement analytiques, comme l'étude de courbures du *quatrième* degré, objets insolites de la géométrie « classique », les y ont conduits.

Dans une seconde partie, (le chapitre 3), nous en donnons une preuve inédite, plus naturelle, plus simple et nettement plus rapide qui s'affranchit du recours à des opérateurs différentiels du quatrième degré ; elle s'inspire très largement des travaux de M. Gursky et J. Viaclovsky (en particulier de [GV]) sur la seconde fonction symétrique du tenseur de Schouten, $\sigma_2(A)$. À l'issue nous discutons un corollaire intéressant de ces travaux qui donne un critère très général d'existence de métriques de Q-courbure *constante*, et explicitons quelques familles d'exemples.

Dans une dernière partie, (le chapitre 4), nous abordons l'étude du cas limite où la norme L^2 de la courbure conforme est égale à $4\pi\sqrt{X(M)}$ et où les deux preuves précédentes de la réduction proposée s'effondrent par dégénérescence de l'ellipticité des équations considérées. En suivant [CGY0] nous commençons par résoudre un « problème du type Yamabe » pour les invariants quadratiques $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - \alpha|W|^2 = 4\sigma_2(A) - \alpha|W|^2$, $\alpha < 1$, avant de construire la solution de l'équation $|\sigma|^2 - |\rho_0|^2 - |W|^2 \equiv 0$ comme limite en $\alpha = 1$ – un argument délicat qui passe par la classification des variétés plates, au sens de Bach, dont la norme L^2 de la courbure de Weyl est égale à $4\pi\sqrt{X(M)}$.

2. LE CAS $\int(4\sigma_2(A) - |W|^2)\, d\mathrm{vol} > 0$: DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

2.1. Déterminants régularisés et paires conformes

Le point de départ est une étude variationnelle plus ou moins systématique du déterminant régularisé d'opérateurs différentiels intrinsèques *conformément covariants* de poids (a, b) , $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire tels que $L_{e^{2f}g} = e^{-bf} L\, e^{af}$ pour toute fonction infiniment différentiable f. Si L est un opérateur différentiel intrinsèque de degré d sur une variété compacte sans bord de dimension n, qui est formellement auto-adjoint et de symbole principal défini positif, le spectre de cet opérateur L est réel, discret, minoré et tend vers l'infini comme $\lambda_i \underset{i\to+\infty}{\sim} Ci^{d/n}$, $i \in \mathbb{N}$. On introduit alors classiquement la fonction ζ spectrale de L, $\zeta_L(s) = \sum\limits_{\lambda_j\neq 0} |\lambda_j|^{-s}$, définie pour les points s de $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est assez grande, et son extension méromorphe, à pôles simples isolés, que l'on obtient par prolongement analytique. On appelle *déterminant régularisé*, et l'on note $\det L$, la valeur $e^{-\zeta_L'(0)}$.

En supposant de plus l'opérateur L conformément covariant et homogène – i.e. satisfaisant $L_{e^{2c}g} = e^{-dc}L_g$ pour tout réel c –, et en s'appuyant sur l'asymptotique en temps petit de la trace du noyau de la chaleur, T. Branson et B. Ørsted, ([BØ], § 2, en particulier (2.7)), explicitent l'expression de la variation conforme du déterminant régularisé d'un tel opérateur sur une variété compacte sans bord de dimension 4 en termes de la géométrie et d'opérateurs « classiques », obtenant ainsi une généralisation de la formule dérivée par Polyakov dans le cas particulier du laplacien sur une surface de Riemann. En posant $F(f) := \log(\det L_{e^{2f}g}/ \det L_g)$ – au sens régularisé précédent – ils établissent que F se décompose en une combinaison linéaire de trois fonctionnelles universelles $(I_i)_{i=1}^3$, la dépendance en l'opérateur L n'affectant que les coefficients $(\gamma_i)_{i=1}^3$ de la décomposition $F = \sum\limits_{i=1}^{3} \gamma_i I_i$.