Séminaire BOURBAKI Juin 2005
57e année, 2004-2005, n$^{\mathrm{o}}$ 951, p. 469 à 480

PROBLÈMES DE RECOUVREMENT ET POINTS EXCEPTIONNELS POUR LA MARCHE ALÉATOIRE ET LE MOUVEMENT BROWNIEN
[d'après Dembo, Peres, Rosen et Zeitouni]

par **Zhan SHI**

INTRODUCTION

La marche aléatoire (ou marche au hasard) sur Z^d est un objet fondamental de la théorie des probabilités. Elle représente le mouvement aléatoire d'une particule (dont le point de départ est, disons, l'origine) qui, à chaque unité de temps, se déplace de façon équiprobable vers l'un de ses $2d$ plus proches voisins. On suppose de plus que tous les déplacements sont indépendants.

En 1960, Erdős et Taylor [17] ont posé le problème suivant pour la marche aléatoire sur Z^2 : quel est le nombre maximal de visites que la marche aléatoire peut effectuer en un site pendant les n premières étapes ?

Plus précisément, introduisons $T_n(x)$, le nombre de visites de la marche aléatoire au point x lors des n premières étapes, et T_n^*, le maximum des variables $T_n(x)$, c'est-à-dire $T_n^* := \max_{x\in Z^2} T_n(x)$. Erdős et Taylor [17] ont prouvé que, presque sûrement,

$$\frac{1}{4\pi} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} \le \frac{1}{\pi}. \tag{1}$$

Ils ont, de plus, conjecturé le résultat suivant :

Conjecture 0.1 (Erdős et Taylor [17]). — *Presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} = \frac{1}{\pi}.$$

Le but de cet exposé est de faire une présentation succincte et non technique des travaux de Dembo, Peres, Rosen et Zeitouni ([5]–[13]) qui démontrent, entre autres, cette conjecture. Ces travaux apportent également une réponse définitive à plusieurs autres problèmes ouverts concernant la marche aléatoire et le mouvement brownien, dont les énoncés sont d'une simplicité remarquable – à l'image de la conjecture 0.1. En particulier, ils décrivent, de façon précise, la nature multi-fractale d'une nouvelle classe d'ensembles de points exceptionnels liés au recouvrement d'une partie de R^d pour le mouvement brownien.

1. POINTS FAVORIS ET POINTS ÉPAIS

1.1. Marche aléatoire

Commençons par définir rigoureusement une marche aléatoire en dimension 2 : on considère une trajectoire aléatoire $S : N \to Z^2$, issue de $S_0 = 0$, telle que les accroissements $\xi_n := S_n - S_{n-1}$ soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont la loi est donnée par $P(\xi_n = e) = \frac{1}{4}$, pour tout e tel que $\|e\| = 1$, où « $\|\cdot\|$ » désigne la norme euclidienne sur Z^2.

Posons, comme ci-dessus, $T_n(x) := \#\{i : 0 \le i \le n,\ S_i = x\}$ et $T_n^* := \max_{x \in Z^2} T_n(x)$. Voici une réponse affirmative à la conjecture 0.1 :

THÉORÈME 1.1 ([11]). — *Presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} = \frac{1}{\pi}.$$

Rappelons que, pour tout $x \in Z^2$ fixé, $T_n(x)$ est approximativement de l'ordre de $\log n$ lorsque $n \to \infty$ (voir Erdős et Taylor [17] pour un énoncé précis). Un point x tel que $T_n(x) \ge \alpha(\log n)^2$ (pour un $\alpha > 0$) est donc « beaucoup visité » par la marche aléatoire. Le théorème suivant décrit la taille de l'ensemble de ces points qui sont beaucoup visités.

THÉORÈME 1.2 ([11]). — (i) *Pour tout* $\alpha \in]0, \frac{1}{\pi}]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \#\{x \in Z^2 : T_n(x) \ge \alpha(\log n)^2\}}{\log n} = 1 - \alpha\pi, \qquad \text{p.s.} \tag{2}$$

(ii) *Presque sûrement, pour toute suite aléatoire* $(x_n)_{n\ge 0}$ *telle que* $T_n(x_n) = T_n^*$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \|x_n\|}{\log n} = \frac{1}{2}.$$

Remarquons que (2) donne la borne inférieure cruciale qui manquait dans la conjecture d'Erdős et Taylor [17].

Un point favori (à l'étape n) est un point $x \in Z^2$ tel que $T_n(x) = T_n^*$ (notion introduite par Erdős et Révész [15]). La seconde partie du théorème 1.2 nous dit donc que les points favoris sont, dans l'échelle logarithmique, plutôt près de la frontière de l'ensemble des points visités.

Il est à signaler que très peu de propriétés sont connues à ce jour pour les points favoris de la marche aléatoire. On peut consulter le livre de Révész [25] (pages 160–161) pour une liste de six questions ouvertes, dont la plupart ont été reprises de l'article d'Erdős et Révész [15]. Signalons, par exemple, l'une des questions fondamentales, à savoir la possibilité d'avoir au moins trois points favoris au fil du temps. Cette question, comme tant d'autres, reste sans réponse même en dimension 1, malgré un joli résultat partiel de Tóth [28].

1.2. Mouvement brownien

Il existe un résultat analogue à celui du théorème 1.2 pour un processus aléatoire pour lequel le temps est continu. Pour introduire ce nouveau processus aléatoire, on considère une marche aléatoire (S_n, $n \geq 0$) à valeurs dans Z^d (avec $d \geq 1$ quelconque, pour l'instant), et on effectue un changement d'échelle

$$W_t^{(N)} := \left(\frac{d}{N}\right)^{1/2} S_{\lfloor Nt \rfloor}, \qquad t \geq 0.$$

Le théorème central limite assure que pour tous $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, $(W_{t_1}^{(N)}, \ldots, W_{t_k}^{(N)})$ converge en loi (lorsque N tend vers l'infini) vers $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$, où $(W_t,\, t \geq 0)$ est un processus aléatoire à valeurs dans R^d tel que, pour tous $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ suit la loi de Gauss de moyenne nulle et de matrice de covariances $(t-s)\mathrm{Id}$. On peut faire en sorte que $t \mapsto W_t$ soit une fonction continue sur R_+. Le processus $(W_t,\, t \geq 0)$ porte le nom de « mouvement brownien ».

Il est souvent plus aisé d'étudier le mouvement brownien que la marche aléatoire, grâce, par exemple, à la propriété d'auto-similarité (ou, en franglais, propriété de « scaling ») du mouvement brownien. On reviendra, dans la section 5.3, sur une relation trajectorielle entre le mouvement brownien et la marche aléatoire, en plus de la convergence en loi décrite ci-dessus.

Dans cette section, on suppose $d = 2$. Soit $\overline{\theta} := \inf\{t \geq 0 : \|W_t\| = 1\}$. Considérons la mesure d'occupation

$$\mu_{\overline{\theta}}(A) := \int_0^{\overline{\theta}} \mathbf{1}_A(W_t)\, dt, \qquad \forall A \subset R^2 \text{ borélien},$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A. L'analogue du théorème 1.2 pour le mouvement brownien s'énonce comme suit. On note $B(x,r)$ le disque ouvert (dans R^2) centré en x et de rayon r, et $\dim(A)$ la dimension de Hausdorff de A.

THÉORÈME 1.3 ([11]). — (i) *Pour tout $a \in]0,2]$, on a, presque sûrement,*

$$\dim\left\{x \in R^2 : \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log^2(1/\varepsilon)} = a\right\} = 2 - a. \tag{3}$$

(ii) *Presque sûrement,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in R^2} \frac{\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log^2(1/\varepsilon)} = 2. \tag{4}$$

À titre de comparaison, rappelons que, typiquement, pour un point x sur la trajectoire de $(W(t),\, t \in [0, \overline{\theta}])$, $\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))$ se comporte à peu près comme $\varepsilon^2 \log(1/\varepsilon)$ lorsque ε est petit (voir Ray [22] pour un énoncé précis). Un point x dans l'ensemble considéré dans (3), qui est donc en quelque sorte « souvent visité », est appelé « point épais » (*thick point* en anglais).

La partie (ii) du théorème 1.3 fournit une réponse affirmative à une conjecture de Perkins et Taylor [21]. Perkins et Taylor ont obtenu la borne supérieure dans (4), et une borne inférieure non optimale (quatre fois plus petite que la limite conjecturée).

2. POINTS TARDIFS ET TEMPS DE RECOUVREMENT

2.1. Marche aléatoire sur un compact

Question : Combien de temps faut-il pour qu'un graphe fini soit recouvert par une marche aléatoire ?

Il s'agit d'un problème important en probabilités, en combinatoire, et en informatique. L'exemple du tore bidimensionnel $Z_n^2 := Z^2/nZ^2$ est le plus célèbre, et est précisément ce qui nous intéresse ici. Soit C_n le temps nécessaire pour que le tore Z_n^2 soit recouvert par une marche aléatoire sur Z_n^2.

Il y a une quinzaine d'années, Aldous et Lawler ont obtenu des bornes asymptotiques pour C_n : lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{2}{\pi} + o(1) \leq \frac{C_n}{(n \log n)^2} \leq \frac{4}{\pi} + o(1), \qquad \text{en probabilité,} \tag{5}$$

la borne supérieure étant due à Aldous [1], et la borne inférieure à Lawler [19].

Aldous [1] a de plus conjecturé que la borne supérieure est optimale, ce qui a été récemment confirmé par le théorème suivant :

Théorème 2.1 ([13]). — *Si C_n désigne le temps de recouvrement de Z_n^2 par une marche aléatoire sur Z_n^2, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{(n \log n)^2} = \frac{4}{\pi}, \qquad \text{en probabilité.}$$

Le problème du temps de recouvrement est, en quelque sorte, le dual de la conjecture de Perkins et Taylor énoncée dans (4).

De même que pour le théorème 1.2 sur les points beaucoup visités par la marche aléatoire, il existe un résultat analogue à celui du théorème 2.1 pour la courbe du mouvement brownien (ou plutôt, pour son voisinage, la saucisse de Wiener).

La preuve du théorème 2.1 réserve une étude spéciale concernant les « points tardifs » (*late points* en anglais) qui sont les derniers à être atteints avant le complet recouvrement. La preuve décrit, en outre, le spectre multi-fractal de l'ensemble des points tardifs.

Pour plus de détails, voir [13].

2.2. Marche aléatoire sur Z^2

Passons maintenant aux problèmes de recouvrement pour la marche aléatoire sur Z^2 (et non plus sur le tore).

On peut se poser deux questions.

Question 1 : Quel est le rayon ϱ_n du plus grand disque, centré à l'origine, recouvert par les n premiers pas de la marche aléatoire sur Z^2 ?

Question 2 : Quel est le rayon R_n du plus grand disque recouvert par les n premiers pas de la marche aléatoire sur Z^2 ?

Commençons par la question 1. Les premiers résultats, dus à Révész [25], ont montré l'existence de constantes $0 < a < b < \infty$ telles que, pour tout $y > 0$,

$$e^{-by} \leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y\right) \leq \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y\right) \leq e^{-ay}. \tag{6}$$

Révész a conjecturé l'existence d'une constante λ, sans précision sur sa valeur, telle que $P(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y)$ converge vers $e^{-\lambda y}$. Lawler [19] a prouvé (6) avec les constantes $a = 2$ et $b = 4$, et a mentionné une conjecture de Kesten qui consistait à dire que la limite vaudrait e^{-4y}. Ceci est confirmé par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2 ([13]). — *Si ϱ_n désigne le rayon du plus grand disque centré à l'origine totalement recouvert par la marche aléatoire sur Z^2 lors des n premières étapes, alors, pour tout $y > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y\right) = e^{-4y}.$$

On peut donc dire que, grosso modo, ϱ_n se comporte comme $\exp(\sqrt{\log n}\,)$.

Passons à la question 2.

Il apparaît que R_n est beaucoup plus grand que ϱ_n. En effet, on a, presque sûrement, pour tout n suffisamment grand,

$$n^{\theta_1} \leq R_n \leq n^{\theta_2}.$$

Ces deux bornes sont dues à Révész qui a démontré le résultat pour $\theta_1 := 0,02$ ([23]) et pour $\theta_2 := 0,42$ ([24]). Il était donc naturel de penser (Révész [23]) que $R_n = n^{\theta+o(1)}$ p.s., pour un certain exposant $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Ceci est confirmé par le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3 ([5]). — *Soit R_n le rayon du plus grand disque recouvert par la marche aléatoire sur Z^2 dans les n premières étapes. On a, presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log R_n}{\log n} = \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Signalons que la preuve du Théorème 2.3 a permis de répondre à la question suivante : quel est le comportement presque sûr, en limite supérieure, du temps nécessaire à la marche aléatoire pour rencontrer un point qu'elle n'a encore jamais visité ? Il s'agissait là d'un problème ouvert d'Erdős et Révész [16].