Astérisque
347, 2012, p. 1–102

CALCUL D'UNE VALEUR D'UN FACTEUR ε PAR UNE FORMULE INTÉGRALE

par

Jean-Loup Waldspurger

Introduction

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, V un espace vectoriel de dimension finie sur F, muni d'une forme quadratique non dégénérée q, D_0 une droite de V qui n'est pas isotrope pour q, W l'orthogonal de D_0 dans V. Notons G le groupe spécial orthogonal de V et H celui de W, que l'on identifie à un sous-groupe de G. Soient π, resp. ρ, une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $H(F)$, que l'on réalise dans un espace E_π, resp. E_ρ. Notons $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi,\rho)$ l'espace des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que $\varphi \circ \pi(h) = \rho(h) \circ \varphi$ pour tout $h \in H(F)$. Notons $m(\rho,\pi)$ la dimension de cet espace. D'après un théorème de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann ([**1**]), on a $m(\rho,\pi) \leq 1$. Supposons π et ρ tempérées. Dans les articles [**12**] et [**14**], on a établi une formule qui calcule $m(\rho,\pi)$ comme somme d'intégrales sur des sous-tores non nécessairement maximaux de H de fonctions qui se déduisent des caractères de π et ρ. D'après les travaux encore en cours d'Arthur, la théorie de l'endoscopie tordue relie les représentations π et ρ, ou plus exactement les L-paquets qui contiennent ces représentations, à des représentations autoduales de groupes linéaires. Indiquons plus précisément de quel groupe linéaire il s'agit, par exemple pour la représentation π. Notons d la dimension de V. Si d est pair, le groupe est GL_d. Si d est impair, G apparaît usuellement comme groupe endoscopique de GL_{d-1} tordu. Mais G est aussi un groupe endoscopique de GL_d tordu et, pour ce que nous faisons, il semble que cette deuxième interprétation soit plus pertinente. D'après la conjecture locale de Gross-Prasad, le nombre $m(\rho,\pi)$ doit être relié à un facteur ε de la paire de représentations de groupes linéaires correspondant à la paire (ρ,π). Cela suggère l'existence d'une formule intégrale, parallèle à celle évoquée ci-dessus, qui calcule ce facteur ε de paire. Inversement, une telle formule devrait permettre, via la théorie de l'endoscopie tordue, de prouver la conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées. Le but de l'article est d'établir cette formule intégrale.

Oublions maintenant les objets introduits ci-dessus, qui n'ont servi que de motivation. On conserve toutefois le corps F. Soient r et m deux entiers positifs ou nuls. Posons $d = m + 1 + 2r$, $G = GL_d$, $H = GL_m$. Soit π une représentation admissible irréductible et tempérée de $G(F)$. On suppose π autoduale, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à sa contragrédiente $\pi^\vee$. Soit ρ une représentation de $H(F)$ vérifiant des conditions similaires. Notons θ_d l'automorphisme de G défini par $\theta_d(g) = J_d{}^t g^{-1} J_d^{-1}$, où J_d est la matrice antidiagonale de coefficients $(J_d)_{i,d+1-i} = (-1)^i$. Introduisons le groupe non connexe $G \rtimes \{1, \theta_d\}$ et sa composante connexe $\tilde{G} = G\theta_d$. Puisque π est autoduale, elle se prolonge en une représentation du groupe non connexe $G(F) \rtimes \{1, \theta_d\}$. Elle se prolonge même de deux façons. Fixons un caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ continu et non trivial. La théorie des modèles de Whittaker permet de choisir l'un des prolongements. On note $\tilde{\pi}$ la restriction de ce prolongement à $\tilde{G}(F)$. On effectue des constructions analogues pour H et ρ. Selon Jacquet, Piatetskii-Shapiro et Shalika, on définit le facteur $\varepsilon(s, \pi \times \rho, \psi)$ pour $s \in \mathbb{C}$. Notons ω_π et ω_ρ les caractères centraux de π et ρ. Soit enfin ν un élément de $F^\times$. On pose

$$\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \omega_\pi((-1)^{[m/2]} 2\nu) \omega_\rho((-1)^{1+[d/2]} 2\nu) \varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi).$$

C'est ce terme que nous allons calculer par une formule intégrale.

Remarque. — Pour éviter un piège, signalons que l'équation fonctionnelle locale n'entraîne pas que ce terme est un signe ± 1, mais seulement que c'est une racine quatrième de l'unité.

Pour manier plus aisément les objets $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$, on les interprète comme des groupes tordus. Soient V un espace vectoriel de dimension d sur F, W un sous-espace de dimension m et Z un sous-espace de V supplémentaire de W. Par le choix d'une base de V, G s'identifie au groupe $GL(V)$ des automorphismes linéaires de V. Notons V^* l'espace dual de V. Alors $\tilde{G}$ s'identifie à l'espace $\mathrm{Isom}(V, V^*)$ des isomorphismes linéaires de V sur V^* ou, si l'on préfère, à l'espace des formes bilinéaires non dégénérées sur V. Le groupe G agit à droite et à gauche sur $\tilde{G}$ par

$$(g, \tilde{x}, g') \mapsto {}^t g^{-1} \circ \tilde{x} \circ g'$$

pour $g, g' \in G$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}$. On note simplement $(g, \tilde{x}, g') \mapsto g\tilde{x}g'$ ces actions. Le point base θ_d s'identifie à une forme symplectique si d est pair, à une forme quadratique si d est impair. On renvoie à 2.1 pour plus de précision. De même, $\tilde{H}$ s'identifie à $\mathrm{Isom}(W, W^*)$. Fixons une forme quadratique non dégénérée $\tilde{\zeta}$ sur Z. On suppose qu'elle est somme orthogonale d'une forme hyperbolique et de la forme $x \mapsto 2\nu x^2$ de dimension 1. On interprète $\tilde{\zeta}$ comme un élément de $\mathrm{Isom}(Z, Z^*)$. On plonge alors $\tilde{H}$ dans $\tilde{G}$: un élément $\tilde{y} \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$ s'identifie à l'élément de $\mathrm{Isom}(V, V^*)$ qui envoie W sur W^*, Z sur Z^*, et dont les restrictions à W, resp. Z, coïncident avec $\tilde{y}$, resp. $\tilde{\zeta}$.

Tout élément $\tilde{x} \in \tilde{G}$ définit un automorphisme $\theta_{\tilde{x}}$ de G caractérisé par l'égalité $\tilde{x}g = \theta_{\tilde{x}}(g)\tilde{x}$. On définit la notion de sous-tore maximal de $\tilde{G}$ de la façon suivante. Soient T un sous-tore maximal de G défini sur F et B un sous-groupe de Borel de G, contenant T mais pas forcément défini sur F. Notons $\tilde{T}$ le sous-ensemble des éléments $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tels que $\theta_{\tilde{x}}$ conserve T et B. C'est un espace principal homogène pour chacune des actions de T à droite ou à gauche. Pour $\tilde{x} \in \tilde{T}$, la restriction à T de $\theta_{\tilde{x}}$ ne dépend pas de $\tilde{x}$. On note cet automorphisme $\theta_{\tilde{T}}$. Nous dirons que $\tilde{T}$ est un sous-tore maximal de $\tilde{G}$ si $\tilde{T}(F)$ n'est pas vide.

Considérons une décomposition $W = W' \oplus W''$. Posons $H' = GL(W')$, $\tilde{H}' = \mathrm{Isom}(W', W'^*)$. Soit $\tilde{T}'$ un sous-tore maximal de $\tilde{H}'$, auquel est associé un sous-tore maximal T' de H', et soit $\tilde{\zeta}_{H,T} \in \mathrm{Isom}(W'', W''^*)$ une forme quadratique. On impose les conditions suivantes :

- la dimension de W' est paire ;
- $\tilde{T}'$ est anisotrope, c'est-à-dire que le seul sous-tore déployé contenu dans le sous-ensemble des éléments de T' fixes par $\theta_{\tilde{T}'}$ est égal à $\{1\}$;
- le groupe spécial orthogonal de la forme $\tilde{\zeta}_{H,T}$ sur W'' est quasi-déployé ainsi que celui de la forme $\tilde{\zeta}_{G,T} = \tilde{\zeta}_{H,T} \oplus \tilde{\zeta}$ sur $W'' \oplus Z$.

On note $\tilde{T}$ l'ensemble des éléments $\tilde{y} \in \tilde{H}$ tels que $\tilde{y}(W') = W'^*$, $\tilde{y}(W'') = W''^*$, que la restriction de $\tilde{y}$ à W' appartienne à $\tilde{T}'$ et que la restriction de $\tilde{y}$ à W'' coïncide avec $\tilde{\zeta}_{H,T}$. On note $\underline{\mathcal{T}}$ l'ensemble des sous-ensembles $\tilde{T}$ de $\tilde{H}$ obtenus de cette façon. Le groupe $H(F)$ agit par conjugaison sur $\tilde{H}$. Cette action conserve l'ensemble $\underline{\mathcal{T}}$. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ de l'ensemble des orbites.

Soit $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}$, reprenons pour cet élément les objets définis ci-dessus, en notant simplement $T = T'$. L'action de $T(F)$ par conjugaison conserve $\tilde{T}(F)$. On note $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ l'ensemble des orbites. C'est une variété analytique sur F sur laquelle on définit une certaine mesure. On définit aussi sur cette variété deux fonctions $\Delta^{\tilde{H}}$ et Δ_r, des valeurs absolues de certains déterminants. On définit également un groupe de Weyl $W(H, \tilde{T})$. Tous ces termes sont élémentaires, on renvoie à 1.4 et 3.2 pour des définitions précises. Ce qui est plus crucial est d'associer à $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\rho}$ deux fonctions $c_{\tilde{\pi}}$ et $c_{\tilde{\rho}}$ sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Soit $\tilde{t}$ un élément de $\tilde{T}(F)$ en position générale, notons $G_{\tilde{t}}$ la composante neutre du sous-groupe des points fixes par $\theta_{\tilde{t}}$ dans G. Ce groupe se décompose en $T_\theta \times SO(\tilde{\zeta}_{G,T})$, où $T_\theta = T \cap G_{\tilde{t}}$ et $SO(\tilde{\zeta}_{G,T})$ est le groupe spécial orthogonal de la forme quadratique $\tilde{\zeta}_{G,T}$ introduite ci-dessus. A $\tilde{\pi}$ est associé un caractère $\Theta_{\tilde{\pi}}$ qui est une fonction localement intégrable sur $\tilde{G}(F)$. Plus précisément, d'après un résultat d'Harish-Chandra généralisé au cas non connexe par Clozel, ce caractère admet au voisinage de $\tilde{t}$ un développement en combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. C'est-à-dire, notons $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}$ l'algèbre de Lie de $G_{\tilde{t}}$ et $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$. Il existe un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})$, il existe un nombre complexe $c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}}(\tilde{t})$ de sorte que, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F))$ à support dans ω, on ait l'égalité

$$\int_{\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)} \Theta_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}\exp(X))\varphi(X)dX = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})} c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}}(\tilde{t}) \int_{\mathcal{O}} \hat{\varphi}(X)dX,$$

où $\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ. Evidemment, pour que cette formule ait un sens, on doit définir précisément la transformation de Fourier ainsi que les diverses mesures. Remarquons que les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$ sont les mêmes que celles dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$. Supposons d'abord d impair. Alors, parce que $\dim(W')$ est paire, l'espace $W''\oplus Z$ de la forme $\tilde{\zeta}_{G,T}$ est de dimension impaire. Puisque cette forme est quasi-déployée, il y a une unique orbite nilpotente régulière dans $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$. On la note $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$ et on pose $c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) = c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}}(\tilde{t})$. Supposons maintenant d pair. Alors $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$ possède en général plusieurs orbites nilpotentes régulières. Mais on peut en sélectionner une de la façon suivante. On peut décomposer l'espace $W''\oplus Z$ muni de sa forme $\tilde{\zeta}_{G,T}$ en somme orthogonale d'un hyperplan X et d'une droite D_0 sur laquelle la forme quadratique est équivalente à $x \mapsto 2\nu x^2$. Nos hypothèses impliquent que le groupe spécial orthogonal $SO(X)$ est quasi-déployé. Puisque $\dim(X)$ est impaire, $\mathfrak{so}(X)(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière. Fixons un point de cette orbite et notons $\mathcal{O}_\nu$ l'orbite dans $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$ qui contient ce point. C'est encore une orbite nilpotente régulière. On pose $c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) = c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}_\nu}(\tilde{t})$. On a ainsi défini une fonction $c_{\tilde{\pi}}$ presque partout sur $\tilde{T}(F)$. Cette fonction est invariante par conjugaison par $T(F)$ et peut être considérée comme une fonction sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Par une construction similaire, on définit une fonction $c_{\tilde{\rho}}$ presque partout sur le même ensemble.

Posons

$$\varepsilon_{\mathrm{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) = \sum_{\tilde{T}\in\mathcal{T}} |W(H,\tilde{T})|^{-1} \int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t})c_{\tilde{\rho}}(\tilde{t})D^{\tilde{H}}(\tilde{t})\Delta_r(\tilde{t})d\tilde{t}.$$

Cette expression est absolument convergente. Notre résultat principal est le théorème 7.1 dont voici l'énoncé.

Théorème 0.1. — *Soit π, resp. ρ, une représentation admissible, irréductible, tempérée et autoduale de $G(F)$, resp. $H(F)$. Alors on a l'égalité*

$$\varepsilon_{\mathrm{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\pi},\tilde{\rho}).$$

Comme nous l'avons expliqué, notre motivation est la conjecture locale de Gross-Prasad. Nous ignorons si cette façon, plutôt compliquée, de calculer un facteur ε peut avoir d'autres applications.

La démonstration reprend celle de **[12]** et **[14]**. Donnons de très brèves indications dans le cas où $r = 0$ et $d = m + 1$ (en fait, ce cas ne peut pas être traité à part car la preuve utilise une récurrence compliquée sur le couple (d, m)). Considérons une fonction $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui est très cuspidale, cf. 1.7. On définit une suite $(\Omega_N)_{N\geq 1}$ de sous-ensembles ouverts compacts de $H(F)\backslash G(F)$ vérifiant les propriétés usuelles

$$\Omega_N \subset \Omega_{N+1} \text{ pour tout N et } \bigcup_N \Omega_N = H(F)\backslash G(F).$$

On note κ_N la fonction caractéristique de l'image réciproque de Ω_N dans $G(F)$. Cela étant, on pose

$$J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \int_{G(F)} \int_{\tilde{H}(F)} \Theta_{\tilde{\rho}}(\tilde{y}) \tilde{f}(g^{-1}\tilde{y}g) d\tilde{y} \kappa_N(g) dg.$$

Cette intégrale est absolument convergente. Comme pour la formule des traces locale d'Arthur, il y a deux façons de calculer la limite de cette expression quand N tend vers l'infini. L'une, que l'on peut qualifier de « géométrique », et qui est la réplique de celle de [**12**] ; l'autre, que l'on peut qualifier de « spectrale », qui s'appuie sur la formule de Plancherel pour le groupe $G(F)$ et qui est la réplique de celle de [**14**]. Ces deux voies conduisent à une égalité

$$J_{\text{géom}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \lim_{N \to \infty} J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = J_{\text{spec}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}).$$

Les deux expressions extrêmes contiennent des distributions (en $\tilde{f}$) qui ne sont pas invariantes : des intégrales orbitales pondérées et des caractères pondérés. Le procédé habituel d'Arthur permet par récurrence d'en déduire d'autres expressions qui ne contiennent plus que des distributions invariantes, et qui continuent d'être égales entre elles. Supposons que $\tilde{\pi}$ est « elliptique », le cas général s'en déduisant assez facilement. On prend pour $\tilde{f}$ un pseudo-coefficient de $\tilde{\pi}$. Alors les deux expressions « invariantes » ci-dessus deviennent respectivement $\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$ et $\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$, ce qui prouve l'égalité de ces deux termes.

Expliquons pourquoi apparaît le terme $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$. Notons E_π et E_ρ des espaces dans lesquels se réalisent π et ρ. Considérons l'espace $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que $\varphi \circ \pi(h) = \rho(h) \circ \varphi$ pour tout $h \in H(F)$. D'après [**1**], cet espace est de dimension 1. Pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$, l'application linéaire $\tilde{\rho}(\tilde{y})^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\pi}(\tilde{y})$ appartient encore à $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et ne dépend pas de $\tilde{y}$. Il existe donc un nombre $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que

$$\tilde{\rho}(\tilde{y})^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\pi}(\tilde{y}) = c\varphi$$

pour tous $\varphi \in \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$. C'est ce nombre c qui apparaît naturellement dans nos calculs spectraux. Or le théorème 2.7 de [**7**] permet de calculer c : à des termes élémentaires près, c'est $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$.

Voici le contenu de l'article. La première section rassemble des définitions et résultats généraux sur les « groupes tordus », selon la terminologie de Labesse. La deuxième introduit plus précisément les groupes GL_d tordus. La partie « géométrique » de notre formule intégrale est traitée dans la section 3. La section 4 contient les majorations nécessaires pour prouver les diverses convergences d'intégrales utilisées dans la section 6. La section 5 établit le résultat évoqué ci-dessus, à savoir que $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$ mesure la compatibilité des deux prolongements $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\rho}$. La partie « spectrale » de la formule intégrale est traitée dans la section 6. Le théorème principal est prouvé dans la septième et dernière section. Ainsi qu'on l'a déjà dit, nos preuves sont parallèles à celles de [**12**] et [**14**], au point d'être parfois identiques. Pour épargner le lecteur, ou