

FEUILLETAGES EN DROITES, ÉQUATIONS DES EIKONALES ET AUTRES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par

Dominique Cerveau

À José Mañuel Aroca, épicurien et grand connaisseur de la géométrie classique

Résumé. — Nous donnons des résultats qui lient les équations classiques des eikonales et les feuilletages en droites de l'espace affine.

Abstract (Foliations by straight lines, equations of the eikonales and other differential equations)

We give several results relating the classical eikonal equations and foliations by straight lines of the affine space.

Introduction

Les solutions globales de certaines équations aux dérivées partielles satisfont souvent à des principes de rigidité étonnants. Ainsi un célèbre théorème de S. Bernstein affirme que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et a son graphe minimal, i.e. f satisfait à l'équation des surfaces minimales, alors f est une fonction affine. Dans cet article on s'intéresse en particulier aux solutions rationnelles $f : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ de l'équation des eikonales $E(f) = c^2$ où $c \in \mathbb{C}$ et E désigne l'opérateur

$$(1) \quad E(f) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)^2.$$

Cette équation est un cas spécial de l'équation différentielle :

$$(2) \quad \det \text{Hess} (f) = 0$$

où $\text{Hess} f$ désigne la matrice Hessienne de f .

Si f satisfait à l'équation (2) l'application de Gauss :

$$(3) \quad G_f : z \rightsquigarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$$

Classification mathématique par sujets (2010). — 37F75.

Mots clefs. — Eikonales, feuilletages en droites.

est dégénérée, i.e. n'est pas de rang maximal. Si f est rationnelle l'adhérence de l'image de G_f est contenue dans une hypersurface algébrique. En particulier il existe un polynôme P irréductible tel que

$$(4) \quad P\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) = 0$$

et f est solution d'une équation différentielle ne mettant en jeu que les dérivées partielles du premier ordre. Par exemple toute solution rationnelle f de l'équation de Monge–Ampère :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\right)^2 = 1$$

satisfait à une équation de type 4.

Dans le cas réel il existe aussi un résultat de rigidité concernant les solutions globales de (5) ; plus précisément si

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe C^2 est solution de l'équation de Monge–Ampère (5), alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Cet énoncé est attribué à Jörgen ; la démonstration qui s'appuie sur le théorème de Picard (une fonction entière qui évite deux points est constante) permet de donner une preuve alternative à l'énoncé de Bernstein. Cette idée est attribuée à E. Bombieri.

On a longtemps cru avec Hesse qu'un polynôme homogène f_ν sur \mathbb{C}^n satisfaisant à l'équation (2) dépendait en fait de moins de n variables, cas où l'on peut trouver un polynôme P satisfaisant à (4) de degré 1. Cet énoncé est correct en petite dimension $n \leq 4$ mais ne l'est plus dès la dimension 5. L'exemple qui suit dû à Gordan et Noether [4] est très populaire car il intervient dans différents contextes [3]. Il s'agit de :

$$(6) \quad \varphi(z) = z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_5.$$

On remarque d'emblée que φ est linéaire dans les variables z_3, z_4, z_5 . Un calcul élémentaire montre que φ satisfait à l'équation différentielle :

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_5} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_4}\right)^2 = 0.$$

Comme l'application de Gauss G_φ est de rang maximal, l'adhérence de l'image de G_φ est la quadrique de \mathbb{C}^5 définie par $X_3 X_5 - X_4^2 = 0$. Par suite il n'existe pas de polynôme P non constant de degré 1 tel que l'on ait (4) : $P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0$.

Revenons à l'équation des eikonales ; elle trouve son importance dans les fondements de l'optique géométrique et aussi en mécanique (Malus, Fresnel, Hamilton...). Si f rationnelle satisfait à $E(f) = c^2$ alors l'image de l'application de Gauss G_f est contenue dans la quadrique $X_1^2 + \dots + X_n^2 = c^2$. Considérons, les coordonnées z_1, \dots, z_n étant fixées (à l'action près du groupe engendré par les translations et le

groupe orthogonal complexe $O(n, \mathbb{C})$ le champ de vecteur rationnel $X = \text{grad } f$ défini par :

$$(8) \quad X = \text{grad } f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Comme on le sait au moins depuis Hamilton [5], si $\exp tX$ est le flot (local, là où il a sens) du champ de vecteur X alors

$$(9) \quad f \circ \exp tX(x) = f(x) + c^2 t$$

(10) et les trajectoires de X sont contenues dans des droites (en fait sont d'adhérence des droites).

On doit imaginer, tout du moins en réel, les niveau de f comme un front d'onde (fig. 1) se déplaçant à la vitesse c^2 le long des droites paramétrées par :

$$(11) \quad t \rightsquigarrow z + tX(z).$$

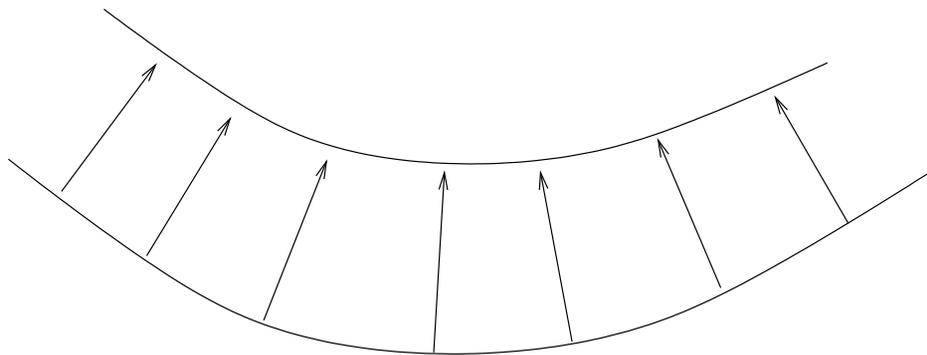


FIGURE 1.

On constate ainsi l'apparition naturelle de feuilletages algébriques de \mathbb{C}^n , et par suite de $\mathbb{C}P(n)$, dont les feuilles sont d'adhérence des droites. Ce sujet était très populaire chez les anciens géomètres en particulier pour l'étude des surfaces et l'intégration géométrique de certaines équations aux dérivées partielles. Dans ses « Leçons sur la théorie générale des surfaces », Gaston Darboux y consacre un volume entier « les congruences de droites et les équations aux dérivées partielles ». Il attribue à Malus le fait d'avoir le premier considéré « de tels assemblages de droites ».

En 1988 dans une courte note aux *C.R.A.S.* [2] j'ai proposé la classification des feuilletages (singuliers) en « droites » de \mathbb{C}^3 , répondant en cela à des préoccupations de René Thom et de l'astronome Pecker. J.V. Pereira m'a indiqué que cet énoncé était connu de Kummer. On trouvera en particulier dans cet article des résultats annoncés dans cette note ainsi qu'une application à l'étude des solutions rationnelles de l'équations des eikonales. Les énoncés précis sont dans le chapitre qui suit.

1. Champs de droites ou feuilletages en droites. Exemples et premiers résultats

Un feuilletage \mathcal{D} en droites de l'espace $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$, ou de l'espace affine \mathbb{C}^n , est par définition un feuilletage algébrique (singulier) de dimension 1, tel qu'en tout point régulier m la feuille \mathcal{L}_m passant par m soit contenue dans une droite D_m . Si $\text{Sing } \mathcal{D}$ désigne l'ensemble singulier de \mathcal{D} , $\text{Sing } \mathcal{D}$ est un ensemble de codimension supérieure ou égale à deux; visiblement $\mathcal{L}_m = D_m - \text{Sing } \mathcal{D}$ pour tout point régulier m . Si $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ est une carte affine la restriction $\mathcal{D}|_{\mathbb{C}^n}$ est donnée par un champ de vecteurs polynomial :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les X_i sont des polynômes tels que $\text{p.g.c.d.}(X_1, \dots, X_n) = 1$. On a :

$$\text{Sing } \mathcal{D} \cap \mathbb{C}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid X_1(z) = \dots = X_n(z) = 0\}.$$

Si m est un point régulier de \mathcal{D} , par m passe évidemment une seule droite D_m tangente à \mathcal{D} . À l'inverse, et nous le préciserons plus loin, si m est un point singulier de \mathcal{D} par m passent une infinité de droites qui sont, en dehors de $\text{Sing } \mathcal{D}$, des feuilles de \mathcal{D} .

Le flot du champ X satisfait à l'équation différentielle

$$(12) \quad \dot{z}_i(t) = X_i(z(t)), \quad z(0) = m.$$

Dire que la trajectoire de m , paramétrée par $t \rightsquigarrow z(t)$, est rectiligne revient à dire que $\dot{z}(t)$ et $\ddot{z}(t)$ sont colinéaires. Comme

$$(13) \quad \begin{aligned} \ddot{z}_i(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial z_k}(z(t)) \cdot \dot{z}_k(t) = \sum_{k=1}^n X_k(z(t)) \cdot \frac{\partial X_k}{\partial z_i}(z(t)) \\ &= X(X_i)(z(t)) \end{aligned}$$

on constate que X définit un feuilletage en droites si et seulement si :

$$(14) \quad \sum X(X_i) \frac{\partial}{\partial z_i} = \mu \cdot \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

pour un certain polynôme μ , où $X(X_i)$ est la dérivée de X_i le long de X .

En particulier les quotients X_i/X_j sont des intégrales premières rationnelles du champ X .

À titre d'exemple considérons dans \mathbb{C}^2 un feuilletage en droites défini par le champ de vecteur local :

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Alors $a = X_2/X_1$ est solution de l'équation de Burger :

$$\frac{\partial a}{\partial z_1} + a \cdot \frac{\partial a}{\partial z_2} = 0.$$

Cet exemple d'équation différentielle non linéaire est bien connu des physiciens.

En dimension deux, dans $\mathbb{CP}(2)$, les pinceaux de droites sont des exemples de champs de droites. Nous verrons plus loin que ce sont les seuls.

En dimension trois c'est un peu plus compliqué. Dans $\mathbb{CP}(3)$, considérons un pinceau de plans donné dans la carte affine $\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3)\}$ par $z_1/z_2 = t$. On se donne une application rationnelle du type :

$$(15) \quad t \rightsquigarrow (tz_2(t), z_2(t), z_3(t)) = m(t)$$

Une telle application revient à se donner dans chaque plan $z_1/z_2 = t$ un point $m(t)$. Maintenant dans chacun de ces plans on considère le pinceau de droites de point de base $m(t)$. On feuillette ainsi $\mathbb{CP}(3)$ (ou \mathbb{C}^3) en droites; l'ensemble singulier est constitué de l'union de l'axe des z_3 et de l'image de l'application (15), (fig 2) :

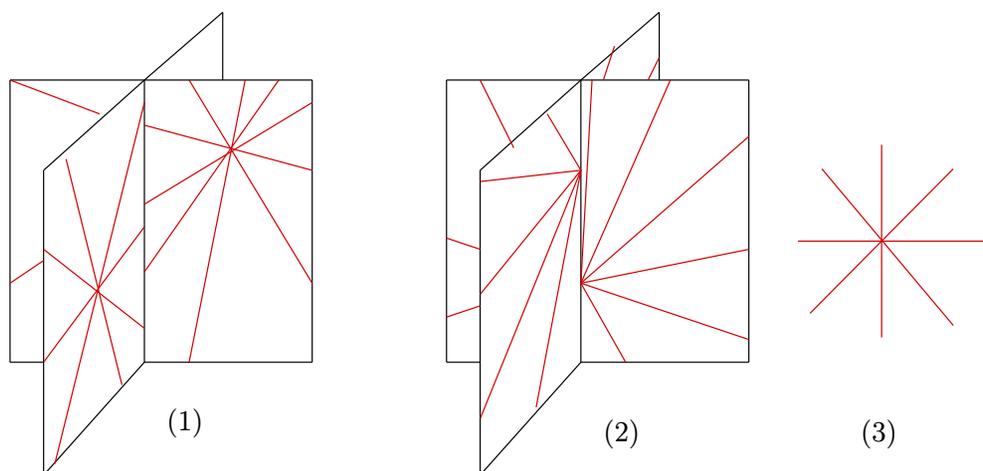


FIGURE 2.

Le premier cas est l'exemple générique. Dans le second, l'image de l'application (15) coïncide avec l'axe des z_3 . Dans ces deux éventualités nous dirons que nous avons un feuillement radial dans les pages d'un livre ouvert. Dans le dernier l'application (15) est constante; le champ de droites est « radial » au point $m = m(t)$.

Enfin introduisons la cubique gauche Σ paramétrée dans une carte affine par

$$(16) \quad t \rightsquigarrow (t, t^2, t^3) = \gamma(t).$$

Pour chaque couple de points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ de Σ on mène la sécante à Σ par ces deux points, convenant que si $t_1 = t_2$ il s'agit de la tangente à Σ en $\gamma(t_1)$. On obtient ici encore un feuillement de $\mathbb{CP}(3)$ (ou \mathbb{C}^3) que nous appellerons feuillement associé à la cubique gauche Σ (fig 3).

Parmi nos résultats en voici deux qu'il est aisé d'énoncer. Bien que leur preuves ne fassent intervenir que des arguments anciens et classiques, nous n'en avons pas trouvé trace.