Astérisque
331, 2010, p. 117–178

REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, DEMI-PLAN p-ADIQUE ET RÉDUCTION MODULO p

par

Christophe Breuil & Ariane Mézard

Résumé. — On calcule par voie cohomologique la réduction modulo p de représentations p-adiques semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). Les calculs exploitent la géométrie du demi-plan p-adique. Ils permettent de retrouver certaines formules de la réduction modulo p de représentations p-adiques semi-stables de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

***Abstract* (Semi-stable representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, p-adic half-plane and modulo p reduction)**
We compute by cohomological means the reduction modulo p of some p-adic semi-stable representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). The calculations use the geometry of the p-adic upper half plane. They allow to recover some of the formulae of the reduction modulo p of p-adic semi-stable representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

1. Introduction et notations

1.1. Introduction. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{O}$ son anneau d'entiers, π une uniformisante de $\mathfrak{O}$ et $\mathbb{F} \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{O}/(\pi)$. Dans [**14**], Teitelbaum calcule par voie cohomologique la réduction modulo π d'un réseau invariant dans le dual (algébrique) de la représentation $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour $k \geq 2$ entier pair ($|\ |$ est la norme p-adique). Plus précisément, si $B(k)$ désigne le Banach p-adique complété de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à un quelconque $\mathfrak{O}$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$, alors le dual $B(k)^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes L$ où $\mathscr{X}$ est le schéma formel du demi-plan p-adique et ω le faisceau inversible des différentielles « régulières » sur $\mathscr{X}$. La réduction modulo π $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes \mathbb{F}$ ci-dessus est alors isomorphe à la représentation $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2} \otimes \mathbb{F})$ qui se calcule explicitement en utilisant la géométrie de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$.

Dans [**4**], d'autres complétés de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à des réseaux invariants qui ne sont pas de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ ont été définis. Ils

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes semi-stables, correspondance de Langlands p-adique, demi-plan p-adique.

font intervenir un paramètre supplémentaire $\mathscr{L} \in L$ et sont notés $B(k, \mathscr{L})$. De plus, la réduction modulo π de $B(k, \mathscr{L})$, ou du dual $B(k, \mathscr{L})^*$, est reliée à la réduction modulo π des représentations p-adiques semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**4**], [**2**]) et est donc plus intéressante à étudier que celle de $B(k)$. Il était donc naturel d'essayer d'étendre le calcul cohomologique de [**14**] à ces nouvelles complétions. C'est l'objet du présent article.

On définit dans un premier temps pour k pair, $2 \leq k \leq p+1$ et $\mathscr{L} \in L$ un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules sans torsion $\omega(k, \mathscr{L})$ pour la topologie de Zariski sur le schéma formel $\mathscr{X}$, extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini par un faisceau cohérent. Il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et est construit de telle sorte que $B(k, \mathscr{L})^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L})) \otimes L$. Dans cet article, nous calculons $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L})) \otimes \mathbb{F}$ pour k pair, $4 \leq k \leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1.1.1. — *Supposons k pair, $4 \leq k \leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Alors, on a une suite exacte de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:*

$$0 \to \left\{ f \in \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2 \right) \otimes \omega \circ \det, a(\mathscr{L}) T_p f = f \right\}$$
$$\to H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L})) \otimes \mathbb{F} \to \left\{ f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1, T_p f = a(\mathscr{L}) f \right\} \to 0$$

où $a(\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\Big(1 + \frac{k}{2}\big(\frac{k}{2} - 1\big)\big(\mathscr{L} - 2(\sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{1}{i})\big)\Big) \in \mathfrak{O}$, où ω est le caractère cyclotomique modulo p (vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$), où $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ est l'induite compacte usuelle sans condition de support et où T_p est un certain opérateur de Hecke sur cette induite (voir §1.2).

Le cas $k = 2$ est trivial mais se comporte un peu différemment (cf. [**4**, §4.5]) . Un corollaire immédiat de ce théorème est que, sous les conditions de l'énoncé, $B(k, \mathscr{L})$ est non nul et admissible au sens de [**12**] (cf. [**4**, Prop.4.4.4]). Mais ces résultats sont maintenant connus sans restriction sur k ou $\mathscr{L}$ par une méthode complètement différente ([**7**], [**8**]). Notons que, lorsque $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$, l'induite de gauche dans la suite exacte est nulle de sorte que l'on a dans ce cas $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L})) \otimes \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1, T_p f = 0\}$. Lorsque $k \leq p-1$ (et sous les autres conditions du théorème 1.1.1), la semi-simplifiée modulo p de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ correspondant à $B(k, \mathscr{L})$ est, à une torsion convenable près, $\omega \mathrm{nr}(a(\mathscr{L})^{-1}) \oplus \mathrm{nr}(a(\mathscr{L}))$ si $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) = 0$ (où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathrm{Frob\ arith}) \overset{\text{déf}}{=} \lambda$) et la représentation irréductible de dimension 2 correspondant au caractère fondamental de niveau 2 si $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$ (voir [**6**]). Dans les deux cas, on retrouve bien exactement un cas particulier de la correspondance modulo p définie dans [**3**] (dualisée), de sorte que les calculs de cet article sont en quelque sorte l'analogue côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des calculs galoisiens de [**6**] pour $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Le théorème 1.1.1 se déduit aussi par une méthode complètement différente des résultats généraux de [**2**] (combinés avec les calculs de [**6**]) sur cette correspondance modulo p. Signalons que nous avons également calculé la représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ lorsque $\mathrm{val}(\mathscr{L})<0$, ce qui fait apparaître des formules analogues à celles du théorème 1.1.1 mais différentes (voir **[6]** pour le côté Galois). Néanmoins, devant la technicité de ces calculs, nous avons finalement renoncé à les rédiger.

Donnons quelques brèves indications sur la preuve du théorème 1.1.1.

Le calcul se fait en deux étapes. Dans la première, on détermine la représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$, dans la deuxième, on détermine $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$. Contrairement au cas purement cohérent de **[14]**, ces deux représentations sont ici différentes.

Commençons par $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$. On calcule d'abord la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ où $\mathbb{P}^1$ est une composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, ce qui donne (cf. §4.2) :

Proposition 1.1.2. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *:*

$$0\to\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\otimes\omega^{i+1}\circ\det\to H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})\to\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1\to0$$

où $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *des matrices triangulaires supérieures modulo* p.

Puis on utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$ (un arbre infini de $\mathbb{P}^1$) par toutes ses composantes irréductibles. La condition de « recollement » aux points d'intersection des composantes fait apparaître une condition faisant intervenir l'opérateur de Hecke T_p et on trouve (cf. §4.4) :

Théorème 1.1.3. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *:*

$$\begin{aligned}0\to\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\Big)\otimes\omega^{i+1}\circ\det\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})\to\\ \Big\{f\in\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1\mid T_pf=a(\mathscr{L})f\Big\}\to0\end{aligned}$$

où $a(\mathscr{L})$ *est comme au théorème 1.1.1.*

Passons maintenant à $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$. Toutes les sections de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ se relèvent dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$. Mais toutes les sections de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ ne se relèvent pas dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p^2)$. Le calcul du défaut de recollement modulo p^2 des sections modulo π du théorème 1.1.3 montre que, dans $\oplus_{i=0}^{k/2-2}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\big)\otimes\omega^{i+1}\circ\det$, seules se relèvent les sections f de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2\big)\otimes\omega\circ\det$ satisfaisant $a(\mathscr{L})T_pf=f$. Mais c'est là la seule obstruction, au sens où les sections qui se relèvent modulo p^2 se relèvent alors modulo p^n pour tout n (et finalement se relèvent dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$). On obtient ainsi le théorème 1.1.1.

L'article est organisé comme suit. Dans le paragraphe 2, on rappelle la définition des espaces $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$ comme espaces de fonctions sur le demi-plan p-adique (§2.1), la définition du schéma formel $\mathscr{X}$ de ce demi-plan (§2.2) puis les calculs de Teitelbaum (§2.3). Dans le paragraphe 3, on définit les faisceaux $\omega(k,\mathscr{L})$ (§3.1) et quelques variantes (§3.2). Dans le paragraphe 4, après des préliminaires sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $\mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ pour certains i (§4.1), on détermine les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.2) et $H^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.3), puis $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ et $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ (§4.4). Dans le paragraphe 5, après des considérations de cohomologie de Čech (§5.1) et quelques calculs préliminaires (§5.2), on détermine le défaut de recollement des sections de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ modulo p^2, ce qui définit des classes de Čech dans $\check{H}^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ que l'on identifie (§5.3), puis on en déduit par dévissage la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ (§5.4). Deux appendices rassemblent les calculs les plus techniques de l'article. Le premier donne des résultats combinatoires et les calculs permettant de déterminer la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$, le deuxième donne des calculs de classes de cohomologie de Čech dans $\check{H}^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ utilisés au §5.3.

Les calculs de cet article sont parfois techniques mais ont au moins l'avantage d'être entièrement géométriques. Nous ignorons si l'on peut définir un autre faisceau que $\omega(k,\mathscr{L})$ qui aurait les mêmes sections globales tensorisées par L mais donnerait lieu à des calculs plus simples. Peut-on par exemple définir un tel faisceau cohérent, ou est-on condamné à travailler avec un faisceau analogue à $\omega(k,\mathscr{L})$, c'est-à-dire mélange d'un faisceau cohérent et d'un faisceau de type fini ? Y-a-t'il une théorie intéressante de tels faisceaux « hybrides » ? Peut-on simplifier les calculs en rajoutant des puissances divisées dans la partie cohérente du faisceau $\omega(k,\mathscr{L})$?

Signalons pour finir que les calculs présentés dans cet article ont aussi une valeur historique. Ce sont eux qui ont suggéré, dès juillet 2002 ([**3**],[**4**]), la définition des représentations $B(k,\mathscr{L})$, ou de leur duale $B(k,\mathscr{L})^*=H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes L$.

Le deuxième auteur remercie B. Edixhoven et V. Maillot pour plusieurs discussions.

1.2. Notations. — Dans tout cet article, on travaille avec des coefficients dans une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dont on note $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers, π une uniformisante et $\mathbb{F}$ le corps résiduel.

On note $G\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $K\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $I\subset K$ le sous-groupe d'Iwahori, i.e. le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo p, et N le normalisateur de I dans G. Le groupe N est engendré par les scalaires, K et la matrice $w_p\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}$.

On note val la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p)=1$, $|\ |\overset{\text{déf}}{=}p^{-\mathrm{val}}$ la norme p-adique et $\chi : G\to\{1,-1\}$ le caractère $\chi(g)\overset{\text{déf}}{=}(-1)^{\mathrm{val}(\det(g))}$. Si n, m sont des entiers positifs ou nuls, on note $\sigma(n,m)$ la représentation de dimension $n+1$ de K

sur $\mathbb{F}$ donnée par l'action à gauche suivante sur le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $\oplus_{i=0}^{n}\mathbb{F}u^i$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u^i \overset{\text{déf}}{=} (ad-bc)^m(au+c)^i(bu+d)^{n-i},\ \ 0\le i\le n.$$

Cette action se factorise en une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. On étend cette action de manière tacite à $K\mathbb{Q}_p^\times$ en faisant agir p par l'identité.

Si $x\in\mathbb{F}_p$, on note $[x]\in\mathbb{Z}_p^\times$ le représentant multiplicatif de x. Si $H\subset G$ est un sous-groupe ouvert contenant $\mathbb{Q}_p^\times$ et σ une représentation de dimension finie de H sur un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V, on note $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ le $\mathbb{F}$-espace vectoriel des fonctions quelconques $f:G\to V$ telles que $f(hg)=h\cdot f(g)$ ($h\in H$, $g\in G$) muni de l'action à gauche de G donnée par $(g\cdot f)(g')\overset{\text{déf}}{=}f(g'g)$. Si $g\in G$ et $v\in V$, on note $[g,v]$ l'unique fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ à support dans Hg^{-1} telle que $[g,v](g')\overset{\text{déf}}{=}g'g\cdot v$ si $g'g\in H$. Toute fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ s'écrit de manière unique comme une somme (infinie en général) de fonctions $[g,v]$ où g parcourt un système de représentants fixé de $H\backslash G$.

Lorsque $\sigma=\sigma(n,m)$ et $H=K\mathbb{Q}_p^\times$, on dispose d'un G-entrelacement canonique $T_p:\mathrm{Ind}_H^G\sigma\to\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ donné par linéarité sur chaque $[g,v]$ par la formule ([**1**], [**3**]) :

$$T_p([g,v])\overset{\text{déf}}{=}\sum_{g'H\in G/H}[gg',\varphi(g'^{-1})(v)]$$

où $\varphi:G\to\mathrm{End}_K(\sigma(n,m))$ est l'unique fonction à support dans $H\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1/p\end{smallmatrix}\right)H$ telle que $\varphi(h_1\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1/p\end{smallmatrix}\right)h_2)=h_1\circ\varphi(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1/p\end{smallmatrix}\right))\circ h_2$ avec $\varphi(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1/p\end{smallmatrix}\right))(u^i)=0$ si $0<i\le n$ et $\varphi(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1/p\end{smallmatrix}\right))(1)=1$. On en déduit en particulier la formule :

$$T_p([\mathrm{Id},1])=\sum_{y\in\mathbb{F}_p}\begin{pmatrix}0&1\\p&[y]\end{pmatrix}[\mathrm{Id},u^n]. \tag{1}$$

On peut munir les représentations $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ d'une topologie « faible » naturelle pour laquelle l'espace sous-jacent est compact et les opérateurs T_p ci-dessus continus. Néanmoins, dans cet article, nous avons pris le parti de ne pas insister sur ces aspects topologiques. Le lecteur scrupuleux pourra vérifier que toutes les applications G-équivariantes de cet article sont continues pour cette topologie.

Si V est un L-espace vectoriel topologique localement convexe, on note V^* son dual, c'est-à-dire le L-espace vectoriel des formes linéaires continues sur V.

On note $\mathbb{C}_p$ le complété p-adique de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et, si $\mathscr{L}\in L$, $\log_{\mathscr{L}}$ l'unique logarithme p-adique sur $\mathbb{C}_p^\times$ tel que $\log_{\mathscr{L}}(p)\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{L}$. On note ε le caractère cyclotomique p-adique $\mathbb{Q}_p^\times\to\mathbb{Z}_p^\times$: il envoie p sur 1 et est l'identité sur $\mathbb{Z}_p^\times$.

On note $H_0\overset{\text{déf}}{=}0$ et $H_n\overset{\text{déf}}{=}1+1/2+\cdots+1/n$ pour n entier >0. Pour des entiers n,m tels que $0\le m\le n$, on note $\binom{n}{m}$ les coefficients binômiaux habituels. Si $m<n$ ou si $m<0$, on convient que $\binom{n}{m}=0$.