Astérisque
331, 2010, p. 13–28

INVARIANTS $\mathscr{L}$ ET DÉRIVÉES DE VALEURS PROPRES DE FROBENIUS

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous donnons une formule pour l'invariant-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur d'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en termes de dérivées de valeurs propres de Frobenius. Combinée avec des résultats de Stevens et de Kisin, cette formule fournit une nouvelle démonstration de l'égalité des invariants-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur et Coleman attachés aux formes modulaires.

Abstract **($\mathscr{L}$-invariants and Frobenius eigenvalues derivatives).** — We give a formula for Fontaine-Mazur's $\mathscr{L}$-invariant attached to a 2-dimensional semi-stable representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ in terms of derivatives of eigenvalues of Frobenius. Combined with results of Stevens and Kisin, this gives a new proof of the equality between Fontaine-Mazur's and Coleman's $\mathscr{L}$-invariants attached to modular forms.

Introduction

0.1. Invariants $\mathscr{L}$ de formes modulaires. — Si f est une forme primitive de poids k_0 pair et niveau N divisible par p, vecteur propre pour(1) T_p pour la valeur propre $p^{k_0/2-1}$, la fonction L p-adique de f a un zéro supplémentaire en $s = k_0/2$. Mazur, Tate et Teitelbaum [**20**] ont conjecturé(2) l'existence d'un invariant $\mathscr{L}(f)$ ne dépendant de f que « localement en p », tel que l'on ait(3)

$$L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}(f) \cdot L(f, k_0/2).$$

Si $k_0 = 2$ et si les coefficients de Fourier de f sont rationnels, il correspond à f une courbe elliptique E, définie sur $\mathbf{Q}$, ayant mauvaise réduction multiplicative déployée

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 11S**, 11F**.
Mots clefs. — Représentation semi-stable, famille de représentations.

(1) Il s'agit de l'opérateur T_p de niveau N divisible par p, c'est-à-dire l'opérateur U_p d'Atkin-Lehner.
(2) Le lecteur pourra consulter [**9**] pour une introduction plus détaillée.
(3) Pour que la formule ci-dessous ait un sens, il faut considérer L_p comme à valeurs dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les périodes de f.

en p. D'après le théorème d'uniformisation de Tate, il existe alors $q \in \mathbf{Q}_p^*$ de valuation non nulle, tel que E soit isomorphe, en tant que variété rigide, à $\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, et on a $\mathscr{L}(f) = \frac{\log q}{v_p(q)}$. Dans le cas général, deux définitions de l'invariant $\mathscr{L}(f)$ ont été proposées : l'une par Coleman [**3**] et l'autre par Fontaine et Mazur [**19**]. L'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ de Coleman est défini via la théorie de l'intégration p-adique de Coleman et l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ de Fontaine-Mazur est défini via le (φ, N)-module filtré de la restriction à un groupe de décomposition en p de la représentation galoisienne V_f associée à f. On dispose des résultats suivants :

Théorème 0.1 **(Stevens)**. — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.2 **(Kato-Kurihara-Tsuji)**. — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.3 **(Coleman-Iovita)**. — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$.

Le théorème de Coleman-Iovita est bien évidemment une conséquence des théorèmes de Stevens et de Kato-Kurihara-Tsuji, mais leur démonstration [**5**], qui se fait en déformant une courbe modulaire sur une famille de $\mathbf{P}^1$, est bien plus directe que celle obtenue en utilisant ces deux théorèmes.

La démonstration de Kato-Kurihara-Tsuji (non rédigée, mais voir [**8, 22**]) repose sur la construction, par Kato [**17**], d'un système d'Euler pour la représentation V_f dont l'image par l'exponentielle de Perrin-Riou [**21**] redonne la fonction $L_p(f, s)$ (la démonstration de ce dernier fait repose sur la loi de réciprocité explicite de Kato [**16**] dont la démonstration est très délicate).

La démonstration de Stevens en poids quelconque est une généralisation de celle qu'il avait obtenue avec Greenberg [**15**] en poids 2 ; elle repose sur les familles de formes modulaires p-adiques et leurs fonctions L. Coleman a construit [**4**], en interpolant(4) des formes modulaires classiques, une famille analytique de formes modulaires p-adiques f_x, pour $x \in \mathscr{X}$, où $\mathscr{X}$ est une boule de $\mathbf{C}_p$ contenant k_0, avec $f_{k_0} = f$. Cette famille est propre pour tous les opérateurs de Hecke et les valeurs propres dépendent analytiquement de $x \in \mathscr{X}$; c'est en particulier le cas de la valeur propre a_p de T_p. Le lien entre $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ et a_p est le suivant (cf. [**26**]).

Théorème 0.4 **(Stevens)**. — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Dans cet article, nous démontrons (cf. th. 0.5 et cor. 0.7) une formule analogue pour l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ en utilisant la famille de représentations galoisiennes attachée à la famille des f_x.

(4) Si $k \in \mathbf{N}$ est un élément de $\mathscr{X}$ tel que $v_p(a_p(k)) < k - 1$, alors f_k est une forme modulaire classique de poids k et conducteur N.

0.2. Familles analytiques de représentations galoisiennes de dimension 2

Soit S une algèbre de Tate, i.e. un quotient d'une algèbre $\mathbf{Q}_p\{X_1,\dots,X_n\}$ de séries convergeant sur la boule unité fermée. L'espace analytique $\mathscr{X}$ associé à S est l'ensemble des morphismes continus de S dans $\mathbf{C}_p$, la topologie sur $\mathscr{X}$ étant celle de la convergence faible. Si $x\in\mathscr{X}$, on note E_x l'adhérence dans $\mathbf{C}_p$ du sous-corps engendré par l'image de S par x. Si E est un sous-corps de $\mathbf{C}_p$, on définit $\mathscr{X}(E)$ comme l'ensemble des $x\in\mathscr{X}$ vérifiant $E_x\subset E$. On voit un élément s de S comme une fonction analytique sur $\mathscr{X}$, en posant $s(x)=x(s)$.

Soit V une S-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un S-module libre de rang 2 muni d'une action S-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Choisissons une base v_1,v_2 de V sur S et notons $A_\sigma\in\mathbf{GL}_2(S)$ la matrice de $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base. Si $x\in\mathscr{X}$, on note V_x la E_x-représentation de dimension 2, pour laquelle la matrice de $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est $A_\sigma(x)$. La fonction $x\mapsto A_\sigma(x)$ étant analytique, la famille de représentations V_x, pour $x\in\mathscr{X}$, définie par V, est « analytique » et V est une *famille analytique de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension* 2.

Soit $\psi_1:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Q}_p$ le caractère (additif) non ramifié de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ normalisé par $\psi_1(\sigma)=1$ si σ induit le frobenius $x\mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\psi_2:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Q}_p$ le logarithme du caractère cyclotomique. Comme ψ_1,ψ_2 forment une base de $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Q}_p)$, il existe $\delta,\kappa\in S$ tels que, quel que soit $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait

$$\log(\det A_\sigma)=\delta\cdot\psi_1(\sigma)+\kappa\cdot\psi_2(\sigma).$$

Notre résultat principal est l'énoncé peu appétissant suivant :

Théorème 0.5. — *Supposons que V a un poids de Hodge-Tate*[(5)] *nul, et qu'il existe $\alpha\in S$ tel que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\widehat{\otimes}V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\varphi=\alpha}$ soit localement libre de rang 1 sur $\mathscr{X}$.*

Alors, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x_0\in\mathscr{X}(E)$ est tel que V_{x_0} soit semi-stable d'invariant de Fontaine-Mazur égal à $\mathscr{L}\in E$ et poids de Hodge-Tate 0 *et $\kappa(x_0)\leqslant -1$, la forme différentielle*

$$\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{1}{2}\mathscr{L}\cdot d\kappa+\frac{1}{2}d\delta$$

s'annule en x_0.

Remarque 0.6. — (i) Le terme $d\delta$ pouvant s'éliminer en tordant par un caractère non ramifié, le théorème ci-dessus montre que l'invariant $\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur s'exprime

(5) Il s'agit des poids de Hodge-Tate κ_1,κ_2 fournis par la théorie de Sen **[24, 25]** ; ils vivent *a priori* dans une extension quadratique (car on est en dimension 2) de S et, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x\in\mathscr{X}(E)$ est tel que V_x est de Hodge-Tate (considérée comme $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension $2\cdot[E{:}\mathbf{Q}_p]$), alors $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ sont des entiers et les poids de Hodge-Tate de V_x sont $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ avec multiplicité $[E{:}\mathbf{Q}_p]$. L'hypothèse selon laquelle l'un des poids de Hodge-Tate est nul implique que l'autre est égal à κ.

simplement en termes de la dérivée logarithmique de la valeur propre de frobenius par rapport au poids de Hodge-Tate, ce qui semble, *a priori*, assez surprenant. En fait, c'est un reflet de la géométrie de l'espace des représentations *triangulines* [**11**]. (Une E-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline s'il existe un caractère continu $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to E^*$ et $\alpha \in E^*$ tels que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha} \neq 0$.)

(ii) La démonstration repose sur un calcul de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine. Le principe consiste à bouger la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}(V_{x_0}))$ pour se ramener à $\kappa(x_0) = -1$. Dans ce cas, la représentation V_{x_0} est une extension de $\mathbf{Q}_p(-1)$ par $\mathbf{Q}_p$ dont la classe dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$ est contrôlée par l'invariant $\mathscr{L}$; on peut alors faire tous les calculs explicitement en utilisant un peu de théorie locale du corps de classes. Cette technique consistant à bouger la filtration pour se ramener à des représentations plus simples a été introduite par Fontaine [**14**] et utilisée avec profit dans [**13**] pour démontrer la conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

(iii) La formule « galoisienne » du théorème ci-dessus a un avatar « automorphe » (cf. [**11**]) faisant intervenir l'invariant $\mathscr{L}$ de Breuil [**2**] défini en termes de représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On passe d'une formule à l'autre via la correspondance de Langlands locale p-adique pour la série principale unitaire [**12**] pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais le calcul est nettement plus facile du côté automorphe. Ce calcul a joué un rôle non négligeable dans la conception de [**10**] dont [**11**] et [**12**] sont issus.

Revenons à la famille analytique de formes modulaires construite par Coleman. On peut interpoler (cf. [**6**]) les représentations galoisiennes p-adiques associées aux formes classiques f_k, pour $k \in \mathbf{Z} \cap \mathscr{X}$ vérifiant $v_p(a_p(k)) < k - 1$, pour construire une S-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, où S est l'algèbre de Tate des fonctions analytiques sur $\mathscr{X}$. En particulier, on a $V_{k_0} = V_f$.

Les poids de Hodge-Tate de V_x sont 0 et $1 - x$ et la représentation $\det V_x$ se factorise à travers une extension finie de $\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Par ailleurs, Saito [**23**] a montré que, si f_x est une forme classique, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_x)^{\varphi=a_p(x)} \neq 0$, et Kisin [**18**] a montré que la représentation V vérifiait les conditions du théorème avec $\alpha = a_p$. On peut donc appliquer le théorème, avec $x_0 = k_0$, $\alpha = a_p$, $\kappa(x) = 1 - x$, $\delta(x) = 0$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}(V_{k_0}) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ pour en déduire le résultat suivant :

Corollaire 0.7. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Finalement, en comparant le corollaire ci-dessus avec le résultat de Stevens, on obtient une nouvelle démonstration du théorème de Coleman-Iovita.

Corollaire 0.8. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$.

1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine

Dans tout le reste de l'article, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et on s'intéresse aux E-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire aux E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action E-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

1.1. Anneaux de Fontaine. — Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de Fontaine et soient

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$

On étend l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. De même, on étend l'action de φ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et l'action de N sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. Finalement, on définit la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ en tensorisant par E la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On a alors $\mathbf{B}^{N=0}_{\mathrm{st},E} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ induit la *suite exacte fondamentale*

$$0 \to E \to \mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \to 0.$$

Soit t le $2i\pi$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique, et on a $\varphi(t) = pt$, $Nt = 0$ et $t^j\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}^{i+j}_{\mathrm{dR},E}$ si $i, j \in \mathbf{Z}$.

1.2. Cohomologie galoisienne. — Si M est un $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-module et si $i \in \mathbf{N}$, on note $H^i(M)$ le i-ième groupe de cohomologie continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans M. Si $j \in \mathbf{Z}$, on note $M(j)$ le module M tordu par la puissance j-ième du caractère cyclotomique.

Proposition 1.1. — (i) *On a* $H^0(\mathbf{C}_p) = H^1(\mathbf{C}_p) = \mathbf{Q}_p$ *et* $H^i(\mathbf{C}_p(j)) = 0$ *si* $j \neq 0$ *ou si* $i \geqslant 2$.

(ii) *Si* $a \leqslant b \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *alors* $H^0(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = 0$ *si* $a > 0$ *ou si* $b \leqslant 0$ (avec la convention $\mathbf{B}^{-\infty}_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ et $\mathbf{B}^{+\infty}_{\mathrm{dR},E} = 0$).

Démonstration. — Le (i) est dû à Tate **[27]** et le (ii) s'en déduit par dévissage et passage à la limite en utilisant l'isomorphisme $\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{i+1}_{\mathrm{dR},E} \cong E \otimes \mathbf{C}_p(i) \cong \mathbf{C}_p(i)^{[E:\mathbf{Q}_p]}$.

1.3. Le module U_1 et son H^1. — Si $i \in \mathbf{N}$, soit $U_i = \mathbf{B}^{N^{i+1}=0,\varphi=p^{i-1}}_{\mathrm{st},E}$. Alors N induit, quel que soit $i \in \mathbf{N}$, la suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}^{\varphi=p^i}_{\mathrm{cris},E} \to U_{i+1} \xrightarrow{N} U_i \to 0.$$

Proposition 1.2. — *L'application naturelle*

$$H^1(E) \to \ker\left(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\right)$$

est un isomorphisme.