Astérisque
330, 2010, p. 13–59

FONCTIONS D'UNE VARIABLE p-ADIQUE

par

Pierre Colmez

Résumé. — Ce texte est un exposé des résultats de base d'analyse fonctionnelle sur $\mathbf{Q}_p$. L'accent est mis principalement sur l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ et son dual des distributions d'ordre r, le point étant que ces espaces se sont retrouvés jouer un rôle important en théorie de Langlands p-adique.

***Abstract* (Functions of a p-adic variable).** — This text is a compilation of basic results in functional analysis over $\mathbf{Q}_p$. The stress is mainly put on the space of $\mathscr{C}^r$-functions and on its dual of distributions of order r, the point being that these spaces have come to play an important rôle in p-adic Langlands theory.

Introduction

Le but de ce texte est de présenter et de démontrer les résultats d'analyse fonctionnelle p-adique dont on a besoin **[7, 8]** en vue de la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations de la série principale de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On donne en particulier plusieurs caractérisations des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$, si r est un réel positif, chacune ayant son intérêt propre :

– l'étude de la dérivation $\frac{d}{dx} : \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$ repose sur la décomposition en vaguelettes,

– la décomposition (de Mahler) sur la base des polynômes binomiaux fournit, par dualité, une caractérisation agréable des distributions d'ordre r en termes de l'ordre de leur transformée d'Amice.

C'est cette dernière description qui permet de construire des distributions tempérées à partir de la théorie des (φ, Γ)-modules, ce qui nous fournit un pont entre le monde des représentations p-adiques du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et certains

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11S80.
Mots clefs. — Analyse fonctionnelle, transformée d'Amice, intégration p-adique.

espaces fonctionnels p-adiques qui se trouvent être reliés à certaines représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

La plupart des résultats de ce texte sont parfaitement classiques, et le lecteur est invité à consulter les travaux cités dans la bibliographie pour d'autres points de vue. Il trouvera un dictionnaire entre analyse fonctionnelle p-adique et anneaux de séries de Laurent dans [**9**, § I.1].

I. Espaces fonctionnels p-adiques

I.1. Espaces de Banach p-adiques. — Ce § ne contient que des généralités sur les espaces de Banach p-adiques.

1. L-banach. — On normalise la valuation p-adique v_p sur $\mathbf{C}_p$ par $v_p(p) = 1$. Si L est un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, on note $\mathscr{O}_L = \{x \in L, v_p(x) \geq 0\}$ l'anneau de ses entiers, $\mathfrak{m}_L = \{x \in L, v_p(x) > 0\}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_L$, et $k_L = \mathscr{O}_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel.

Si B est un L-espace vectoriel, une *valuation* v_B sur B est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $v_B(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$;

(ii) $v_B(x + y) \geq \inf(v_B(x), v_B(y))$ quels que soient $x, y \in B$;

(iii) $v_B(\lambda x) = v_p(\lambda) + v_B(x)$ quels que soient $\lambda \in L$ et $x \in B$.

Un *L-banach* B est un L-espace vectoriel topologique, la topologie étant définie par une valuation v_B pour laquelle il est complet. Une application $f : B_1 \to B_2$ est un *morphisme de L-banach* si elle est L-linéaire et continue ; c'est une *isométrie* de B_1 dans B_2 si $v_{B_2}(f(x)) = v_{B_1}(x)$, pour tout $x \in B_1$.

Exemple I.1.1. — (i) Si I est un ensemble, soit $\ell_\infty(I, L)$ l'ensemble des familles bornées $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de L. On munit $\ell_\infty(I, L)$ de la valuation v_{ℓ_∞} définie par $v_{\ell_\infty}((a_i)_{i\in I}) = \inf_{i\in I} v_p(a_i)$, ce qui en fait un L-banach.

(ii) Soit $\ell^0_\infty(I, L)$ le sous-espace de $\ell_\infty(I, L)$ des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de L tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. C'est un L-banach comme sous-L-espace vectoriel fermé d'un L-banach. C'est aussi l'adhérence dans $\ell_\infty(I, L)$ de l'espace des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

(iii) Plus généralement, si I est un ensemble, et si B est un L-banach, l'espace $\ell_\infty(I, B)$ (resp. $\ell^0_\infty(I, B)$) des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de B, qui sont bornées (resp. qui tendent vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies), muni de la valuation v_{ℓ_∞} définie par $v_{\ell_\infty}((a_i)_{i\in I}) = \inf_{i\in I} v_B(a_i)$, est un L-banach.

La plupart des résultats classiques de la théorie des espaces de Banach réels restent valables pour les L-banach (le théorème de Hahn-Banach demande un peu de précaution). En particulier, on a les résultats suivants.

Proposition I.1.2. — (i) *Si $f : B_1 \to B_2$ est un morphisme de L-banach, alors f^{-1} est continu et donc f est un isomorphisme de L-banach (théorème de l'image ouverte).*

(ii) *Une limite simple d'applications linéaires continues sur un L-banach est continue (théorème de Banach-Steinaus).*

2. Bases orthonormales et bases de Banach. — La théorie des espaces de Banach p-adiques est très loin d'être aussi riche que son homologue archimédienne ; elle se rapproche plutôt de celle des espaces de Hilbert réels. En particulier, la notion suivante remplace celle de base hilbertienne dans un espace de Hilbert.

Définition I.1.3. — Soit B un L-banach. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de B est *une base orthonormale de B* de B si l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i e_i$, de $\ell^0_\infty(I, L)$ dans B, est une isométrie. On dit que c'est *une base de Banach* si cette application est seulement un isomorphisme de L-banach. Autrement dit, une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B si et seulement si :

(i) tout élément x de B peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série convergente $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$, où les a_i sont des éléments de L tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies,

(ii) $v_B(x) = \inf_{i\in I} v_p(a_i)$.

C'est une base de Banach si elle est bornée et vérifie la condition (i), ce qui implique, d'après le théorème de l'image ouverte, la propriété suivante.

(ii') il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $x \in B$, on ait l'encadrement $-C + \inf_{i\in I} v_p(a_i) \leq v_B(x) \leq C + \inf_{i\in I} v_p(a_i)$.

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de B est *orthogonale* s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de L telle que, quelle que soit la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de L, on ait $v_B(\sum_{i\in I} x_i \lambda_i e_i) = \inf_{i\in I} v_p(x_i)$. Une base orthonormale est donc orthogonale.

Exemple I.1.4. — Si I est un ensemble, et si $i \in I$, on note δ_i la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice i qui est égal à 1. Par définition, ou presque, les δ_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de $\ell^0_\infty(I, L)$.

Proposition I.1.5. — *Si L est de valuation discrète, et π_L est une uniformisante de L, alors :*

(i) *Tout L-banach possède des bases de Banach.*

(ii) *Un L-banach possède des bases orthonormales si et seulement si $v_B(B) = v_p(L)$. De plus, sous cette hypothèse, si on note $B^0 = \{x \in B \mid v_B(x) \geq 0\}$, alors $(e_i)_{i\in I}$*

est une base orthonormale de B si et seulement si $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ est une base algébrique du k_L-espace vectoriel $\overline{B} = B^0/\pi_L B^0$.

Démonstration. — Si B est un L-banach muni de la valuation v_B, alors v'_B, définie par $v'_B(x) = v_p(\pi_L)\cdot\left[\frac{v_B(x)}{v_p(\pi_L)}\right]$, est une valuation sur B, équivalente à v_B, à valeurs dans $v_p(L)$, ce qui permet de déduire le (i) du (ii). Supposons donc que $v_B(B) = v_p(L)$, et montrons que $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B si et seulement si $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ est une base algébrique du k_L-espace vectoriel $\overline{B}$.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de B^0 telle que la famille $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ soit une base du k_L-espace vectoriel $\overline{B}$. Soient S un système de représentants de k_L dans $\mathscr{O}_L$, contenant 0, et $s : k_L \to S$ l'inverse de la réduction modulo π_L. Si $x \in B^0$, on peut écrire $\overline{x}$ comme une somme finie $\sum_{i\in I} a_i\overline{e}_i$, où les a_i sont des éléments de k_L presque tous nuls. Soit $s(x) = \sum_{i\in I} s(a_i)e_i$. Par construction, on a $x - s(x) \in \pi_L B^0$.

Si $x \in B^0$, définissons par récurrence une suite x_n d'éléments de B^0 par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \frac{1}{\pi_L}(x_n - s(x_n))$. On a alors $x = \sum_{n=0}^{k}\pi_L^n s(x_n) + \pi_L^{k+1}x_{k+1}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. On peut écrire $s(x_n) = \sum_{i\in I} s_{n,i}e_i$, où les $s_{n,i}$ sont des éléments de S presque tous nuls, ce qui montre que si on pose $a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\pi_L^n s_{n,i}$, alors la suite des a_i tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. Ceci montre que l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_ie_i$ est une surjection de $\ell^0_\infty(I)$ sur B. Si $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I} \in \ell^0_\infty(I)$ vérifie $v_{\ell_\infty}(\mathbf{a}) = 0$, on a $\sum_{i\in I} a_ie_i \neq 0$ modulo π_L car les $\overline{e}_i$, pour $i \in I$, forment une base de $\overline{B}$. Ceci implique que $0 \leq v_B\big(\sum_{i\in I} a_ie_i\big) < v_p(\pi_L)$, et comme on a supposé que $v_B(B) = v_p(\pi_L)$, on en déduit que $v_B\big(\sum_{i\in I} a_ie_i\big) = 0$ et que l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_ie_i$ est une isométrie de $\ell^0_\infty(I)$ sur B. Ceci prouve que si les $\overline{e}_i$, pour $i \in I$, forment une base de $\overline{B}$, alors les e_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de B.

Supposons maintenant que les e_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de B. Si $x \in \overline{B}$, on peut choisir $\tilde{x} \in B^0$ ayant pour image x modulo p. Comme $v_B(\tilde{x}) \geq 0$, on peut écrire $\tilde{x}$, de manière unique, sous la forme $\tilde{x} = \sum_{i\in I} a_ie_i$, où $a_i \in \mathscr{O}_L$ tend vers 0 à l'infini. Il en résulte que la réduction $\overline{a}_i$ modulo π_L de a_i est nulle sauf pour un nombre fini de i (on a $\overline{a}_i \neq 0$ si et seulement si $v_p(a_i) = 0$), et que $x = \sum_{i\in I}\overline{a}_i\overline{e}_i$ est une combinaison linéaire des $\overline{e}_i$; les $\overline{e}_i$ forment donc une famille génératrice de $\overline{B}$. Enfin, si $\sum_{i\in I} a_i\overline{e}_i = 0$ dans $\overline{B}$, et si $\tilde{a}_i \in \mathscr{O}_L$ a pour image a_i modulo π_L, alors $x = \sum_{i\in I}\tilde{a}_ie_i \in pB^0$, et donc $v_B(x) > 0$. Comme $v_B(x) = \inf_{i\in I} v_p(\tilde{a}_i)$, cela implique $v_p(\tilde{a}_i) > 0$, et donc $a_i = 0$, pour tout $i \in I$. Il s'ensuit que les $\overline{e}_i$ forment une famille libre, et donc une base, de $\overline{B}$.

Ceci permet de conclure.

3. Le dual d'un L-banach. — Si B est un L-banach, on note B^* le L-espace vectoriel des formes L-linéaires continues $f : B \to L$. Muni de la *topologie forte* définie par la valuation v_{B^*} donnée par la formule

$$v_{B^*}(f) = \inf_{x \in B - \{0\}} v_p(f(x)) - v_B(x),$$

cet espace est un L-banach. On peut aussi munir B^* de la *topologie faible* de la convergence simple (topologie la plus faible telle qu'une suite f_n, $n \in \mathbf{N}$, ait pour limite f, si et seulement si, quel que soit $x \in B$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$). D'après le théorème de Banach-Steinhaus, B^* est aussi complet pour la topologie faible, mais l'espace ainsi obtenu n'est un L-banach que si B est de dimension finie.

Proposition I.1.6. — *Soit I un ensemble.*

(i) *Si $b = (b_i)_{i \in I} \in \ell_\infty(I, L)$, et si $a = (a_i)_{i \in I} \in \ell^0_\infty(I, L)$, la série $\sum_{i \in I} b_i a_i$ converge dans L.*

(ii) *Si $f_b(a)$ désigne la somme de la série $\sum_{i \in I} b_i a_i$, l'application $b \mapsto f_b$ est une isométrie de $\ell_\infty(I, L)$ sur le dual de $\ell^0_\infty(I, L)$.*

Démonstration. — La seule chose non totalement évidente est la surjectivité de l'application $b \mapsto f_b$. Soit donc $f \in \ell^0_\infty(I, L)^*$. Comme f est continue, si on pose $b_i = f(\delta_i)$, on a $v_p(b_i) \geq v_{\ell^0_\infty(I,L)^*}(f)$, ce qui prouve que $b = (b_i)_{i \in I} \in \ell_\infty(I, L)$. Mais alors $f - f_b$ est nul sur le sous-espace de $\ell^0_\infty(I, L)^*$ engendré par les δ_i ; comme celui-ci est dense et $f - f_b$ continue, cela implique $f = f_b$. Ceci permet de conclure.

Remarque I.1.7. — Soit δ_i^* l'élément de $\ell^0_\infty(I, L)^*$ défini par $\delta_i^*(\delta_j) = 1$, si $j = i$, et $\delta_i^*(\delta_j) = 0$, si $j \neq i$. On montre facilement que, si $f \in \ell^0_\infty(I, L)^*$, alors f est somme de la série $\sum_{i \in I} f(\delta_i)\delta_i^*$ dans $\ell^0_\infty(I, L)^*$, muni de la topologie faible (la série ne converge pas pour la topologie forte, sauf si I est un ensemble fini).

4. Produit tensoriel de L-banach. — Soient B_1 et B_2 deux L-banach. Si $z \in B_1 \otimes_L B_2$, on définit $v_{B_1 \otimes B_2}$ comme le maximum des $\inf_{j \in J}(v_{B_1}(x_j) + v_{B_2}(y_j))$ pour toutes les écritures possibles de z sous la forme $\sum_{j \in J} x_j \otimes y_j$. Ceci munit $B_1 \otimes_L B_2$ d'une semi-valuation, et on note $B_1 \widehat{\otimes}_L B_2$ le séparé complété de $B_1 \otimes_L B_2$ pour cette semi-valuation. C'est le *produit tensoriel complété* de B_1 et B_2.

Proposition I.1.8. — *Si I est un ensemble et B est un L-banach, alors $\ell^0_\infty(I, L) \widehat{\otimes}_L B$ est isométrique à $\ell^0_\infty(I, B)$.*

Démonstration. — L'espace $\ell^0_\infty(I, L) \otimes_L B$ est le sous-espace de $\ell^0_\infty(I, B)$ des suites $(a_i)_{i \in I}$ telles que le sous-L-espace vectoriel de B engendré par les a_i, $i \in I$, soit de dimension finie. Il contient en particulier l'espace des suites $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments de B, avec $a_i = 0$ en dehors d'un sous-ensemble fini de I. Comme cet dernier espace est dense dans $\ell^0_\infty(I, B)$, il suffit de vérifier que la valuation v définie ci-dessus sur $\ell^0_\infty(I, L) \otimes_L B$ est celle induite par l'inclusion de $\ell^0_\infty(I, L) \otimes_L B$ dans $\ell^0_\infty(I, B)$.