

## COMPARAISON DES VALUATIONS DIVISORIELLES

*par*

Charef Beddani

---

**Résumé.** — En utilisant la notion de la connexité en codimension un, nous allons donner dans cet article une nouvelle démonstration géométrique du théorème d’Izumi dans deux cas particuliers. Ensuite, nous allons proposer la conjecture suivante : soient  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau local intègre normal complet et  $\nu_1, \nu_2$  deux valuations divisorielles centrées en  $\mathfrak{m}$ , alors il existe un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire  $I$  de  $R$ , tel que les centres de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  dans l’éclatement normalisé de  $\text{Spec}R$  le long de  $I$  sont liés en codimension 1. A la fin de ce travail, nous présentons quelques commentaires concernant cette conjecture.

**Abstract (Comparison of divisorial valuations).** — Using the notion of connectivity in codimension one, we give in this paper a new geometric proof of Izumi’s theorem in two special cases. We also propose the following conjecture: let  $(R, \mathfrak{m})$  be a complete, normal local domain and  $\nu_1, \nu_2$  two divisorial valuations centered in  $\mathfrak{m}$ . Then there exists an  $\mathfrak{m}$ -primary ideal  $I$  of  $R$  such that the centers of  $\nu_1$  and  $\nu_2$  in the normalised blowing up of  $\text{Spec}R$  along  $I$  are linked in codimension 1. At the end of the paper, we make some comments about this conjecture.

### Introduction

Les valuations divisorielles sont des objets fondamentaux pour l’étude de la résolution des singularités. Elles ont été étudiées par Zariski, Abhyankar, Rees, Swanson et beaucoup d’autres. Plus récemment l’étude des valuations pour aborder de manière nouvelle le problème de résolution des singularités a été proposé, notamment par M. Spivakovsky (cf. [11]) et B. Teissier (cf. [12]). Nous nous intéressons dans cet article à l’étude des valuations divisorielles. Plus précisément, nous présentons dans la première section quelques résultats élémentaires concernant les valuations divisorielles avec leurs démonstrations. La deuxième section est consacrée à la comparaison des valuations divisorielles. Nous donnons une approche géométrique du théorème d’Izumi (cf. [10]), en utilisant la notion de connexité en codimension 1 (cf. [3]). De manière générale, nous allons montrer le résultat suivant : Soient  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 13F30, 13G05, 14E05.

**Mots clefs.** — Algèbre de Rees, clôture intégrales des idéaux, valuations de Rees, valuations divisorielles, théorème d’Izumi, géométrie birationnelle.

local intègre noëthérien analytiquement irréductible et  $\nu_1, \nu_2$  deux valuations divisorielles associées à un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire  $I$  telles que les centres  $E_1$  et  $E_2$  de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  respectivement dans l'éclatement normalisé  $\overline{X}_I$  de  $\text{Spec } R$  le long de  $I$  sont liés en codimension 1. C'est-à-dire, qu'il existe une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, \dots, Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de  $E_I = \text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} \overline{I}^n / I \cdot \overline{I}^n$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq s-1$ , la codimension de  $Y_i \cap Y_{i+1}$  dans  $Y_{i+1}$  est égale à 1. Alors les topologies  $\nu_1$ -adique et  $\nu_2$ -adique sont linéairements équivalentes. Autrement dit, il existe un entier naturel  $r$  tel que pour tout élément  $x$  non nul appartenant à  $R$ , nous avons

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x) \quad \text{et} \quad \nu_2(x) \leq r\nu_1(x).$$

Ensuite, nous en déduisons une nouvelle démonstration du théorème d'Izumi (cf. Théorème 2.1) sur les anneaux analytiquement irréductibles de dimension inférieure ou égale à deux. Les démonstrations connues auparavant de ce théorème en dimension deux (cf. [7, 5, 10]) sont basées sur le fait que la matrice  $M = (E_i \cdot E_j)_{1 \leq i, j \leq s}$  est définie négative. En dimension supérieure où égale à trois, la matrice d'intersection n'a pas de sens. Pour cette raison, D. Rees utilise une démonstration par récurrence sur la dimension de  $R$  (cf. [10]) quand la dimension de  $R$  est supérieure ou égale à trois. La démonstration qu'on donne dans cet article sous quelques hypothèses est directe en dimension quelconque (sans récurrence sur la dimension de  $R$ ). Nous trouvons un remplacement géométrique en dimension supérieure pour la négativité de la matrice  $M$  qui est un phénomène spécifique en dimension deux.

Le théorème d'Izumi est toujours vrai sans ajouter la condition «  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont liées en codimension 1 », c'est la raison pour laquelle nous allons proposer la conjecture suivante : soient  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau local intègre normal complet et  $\nu_1, \nu_2$  deux valuations divisorielles centrées en  $\mathfrak{m}$ . Alors il existe un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire  $I$  de  $R$  tel que les centres de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  dans  $\overline{X}_I$  sont liés en codimension 1.

Pour les surfaces (i.e.  $\dim R = 2$ ), nous allons montrer que la conjecture précédente est une conséquence immédiate du théorème principal de Zariski. Ensuite, nous allons suivre les travaux de R. Hartshorne concernant la connexité en codimension (cf. [3]), et ceux de M. Spivakovsky sur les valuations divisorielles (cf. [11]), pour démontrer que cette conjecture est vraie si  $R$  admet une résolution des singularités plongée. En particulier, elle est vraie si  $R$  est quasi-excellent de caractéristique zéro ou  $\dim R \leq 3$  et  $R$  est de type fini sur un corps parfait.

*Remerciement* : Je remercie Mark Spivakovsky, pour les remarques et les conseils qui m'ont permis d'apporter certaines précisions et de rendre plus claires plusieurs parties de ce texte.

## 1. Préliminaires

Tous les anneaux considérés dans cet article sont commutatifs et unitaires. Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier d'un anneau  $R$ , on note  $ht \mathfrak{p}$  la hauteur de  $\mathfrak{p}$ , et  $k(\mathfrak{p})$  le corps résiduel

de l'anneau  $R_{\mathfrak{p}}$ . Si  $(Q, \mathfrak{n})$  est un anneau local contenant  $R$  tel que  $\mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{m}$ , on note  $\text{deg.tr.}_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{n})$  le degré de transcendance de  $k(\mathfrak{n})$  sur  $k(\mathfrak{m})$ .

**Notation 1.1.** — Soit  $\Gamma$  un groupe commutatif totalement ordonné. Nous adjoignons au groupe  $\Gamma$  un élément  $\infty$  et nous appelons  $\Gamma_{\infty}$  l'ensemble ainsi obtenu :  $\Gamma_{\infty} = \Gamma \cup \{\infty\}$ . Nous munissons cet ensemble d'une relation d'ordre total en posant pour tout  $\gamma \in \Gamma$  :

1.  $\gamma \leq \infty$ .
2.  $\infty + \gamma = \gamma + \infty = \infty + \infty = \infty$ .

**Définition 1.2.** — Soient  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau local intègre et  $K$  son corps de fractions. On appelle valuation de  $K$  à valeurs dans un groupe totalement ordonné  $\Gamma$ , toute application  $\nu$  de  $K$  dans  $\Gamma_{\infty}$  qui vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tous  $x, y \in K$ ,  $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ ,
2. Pour tous  $x, y \in K$ ,  $\nu(x + y) \geq \inf(\nu(x), \nu(y))$ ,
3. Pour tout  $x \in K$ ,  $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$ .

**Définition 1.3.** — Soient  $\Gamma$  un groupe commutatif totalement ordonné et  $\nu$  une valuation à valeurs dans  $\Gamma$ . Le rang rationnel de  $\nu$  est un élément de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  défini par

$$\text{rang rat. } \nu := \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

Si  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ , on dit que la valuation  $\nu$  est discrète. Dans ce cas, on note, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$I_n(\nu) = \{x \in R \text{ tel que } \nu(x) \geq n\}.$$

Si  $I$  est un idéal de  $R$  finiment engendré, on note :  $\nu(I) = \min\{\nu(x) \text{ tel que } x \in I\}$ . Nous rappelons que si  $\nu$  est une valuation discrète de  $K$ , alors l'ensemble des éléments  $x \in K$  tels que  $\nu(x) \geq 0$  forme un anneau local. Cet anneau s'appelle l'anneau de valuation associé à  $\nu$ , on le note  $R_{\nu}$ . Son idéal maximal  $\mathfrak{m}_{\nu}$  est défini par  $\mathfrak{m}_{\nu} = \{x \in K \text{ tel que } \nu(x) \geq 1\}$ .

**Définition 1.4.** — Soient  $R$  un anneau intègre,  $K$  son corps de fractions et  $\nu$  une valuation discrète de  $K$  centrée dans  $R$  en  $\mathfrak{p}$  (ie.  $R \subset R_{\nu}$  et  $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{m}_{\nu}$ ). La valuation  $\nu$  est dite divisorielle si elle vérifie l'égalité suivante

$$\text{deg.tr.}_{k(\mathfrak{p})} k_{\nu} = \text{ht } \mathfrak{p} - 1,$$

où  $k_{\nu} = R_{\nu}/\mathfrak{m}_{\nu}$  est le corps résiduel de  $R_{\nu}$ .

**Définition 1.5.** — Soient  $R$  un anneau intègre et  $K$  son corps de fractions. On dit que  $R$  est N-2 si pour toute extension finie  $L$  de  $K$ , la clôture intégrale de  $R$  dans  $L$  est un  $R$ -module de type fini.

**Définition 1.6.** — Un anneau  $R$  est dit de Nagata (ou universellement japonais) s'il est nœthérien et pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $R$ , l'anneau  $R/\mathfrak{p}$  est N-2.

**Lemme 1.7.** — Soient  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau noëthérien local intègre de Nagata et  $K$  son corps de fractions. Alors pour toute valuation divisorielle  $\nu$  de  $K$  centrée dans  $R$  en  $\mathfrak{m}$ , il existe un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire  $I$  de  $R$  tel que le centre de  $\nu$  dans  $\overline{X}_I$  est de codimension 1 dans  $\overline{X}_I$ .

*Démonstration.* — On peut choisir  $(a_1, a_2, \dots, a_d)$  un système de paramètres de  $R$  tel que les images de  $a_2/a_1, a_3/a_1, \dots, a_d/a_1$  dans  $R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$  sont algébriquement indépendantes sur  $k(\mathfrak{m})$ . Pour tout  $i = 1, 2, \dots, d$ , soit  $s_i = \prod_{j \neq i} \nu(a_j)$ . Prenons  $I$  l'idéal de  $R$  engendré par  $a_1^{s_1}, a_2^{s_2}, \dots, a_d^{s_d}$ . Il est clair d'après le théorème de la dimension (cf. [8], Théorème 2.5, Page 333) que le centre de  $\nu$  dans  $\overline{X}_I$  est de codimension 1 dans  $\overline{X}_I$ .  $\square$

**Définition 1.8.** — Soit  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau local intègre. On dit que  $R$  est analytiquement irréductible si le complété  $\mathfrak{m}$ -adique de  $R$  est intègre.

**Lemme 1.9.** — Soient  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau local noëthérien intègre analytiquement irréductible et  $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$  le complété  $\mathfrak{m}$ -adique de  $R$ . Alors pour toute valuation divisorielle  $\nu$  de  $R$  centrée en  $\mathfrak{m}$ , il existe une seule valuation divisorielle  $\widehat{\nu}$  de  $\widehat{R}$  centrée en  $\widehat{\mathfrak{m}}$  telle que pour tout  $x \in R$  on a  $\widehat{\nu}(x) = \nu(x)$ .

*Démonstration.* — Montrons d'abord l'existence de  $\widehat{\nu}$ . Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{R} & \xrightarrow{\widehat{i}} & \widehat{R}_\nu \end{array}$$

où  $\widehat{R}_\nu$  est le complété  $\mathfrak{m}_\nu$ -adique de  $R_\nu$ . L'anneau  $\widehat{R}_\nu$  est un anneau de valuation discrète. Posons  $\widehat{\nu}$  la valuation associée à  $\widehat{R}_\nu$ . Nous allons montrer que le morphisme  $\widehat{i}$  est injectif. Supposons le contraire (ie.  $\mathfrak{p} = \ker \widehat{i} \neq (0)$ ). Puisque l'anneau  $\widehat{R}_\nu$  est intègre, l'idéal  $\mathfrak{p}$  est premier. Notons  $\mu$  la restriction de  $\widehat{\nu}$  à  $k(\mathfrak{p})$ . Soient  $\nu_0$  une valuation de  $\widehat{R}_\mathfrak{p}$  centrée en  $\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{p}$  et  $\nu_1$  une extension de  $\mu$  au corps résiduel de  $\nu_0$ . Prenons  $\nu_2 = \nu_0 \circ \nu_1$  la valuation composée avec les valuation  $\nu_0$  et  $\nu_1$  (cf. [13]). Nous avons l'égalité

$$(1) \quad \text{rang rat. } \nu_2 = \text{rang rat. } \nu_0 + \text{rang rat. } \nu_1.$$

Comme  $\widehat{R}$  est intègre, la hauteur de  $\mathfrak{p}$  est supérieure ou égale à 1. Donc le rang rationnel de  $\nu_0$  est supérieur ou égal à 1. Nous en déduisons d'après l'égalité (1) que

$$(2) \quad \text{rang rat. } \nu_2 \geq 2.$$

De plus, on a

$$(3) \quad \text{deg.tr.}_{k(\widehat{\mathfrak{m}})} k_{\nu_2} \geq \text{deg.tr.}_{k(\mathfrak{m})} k_\nu.$$

Les inégalités (2) et (3) donnent

$$\text{deg.tr.}_{k(\widehat{\mathfrak{m}})} k_{\nu_2} + \text{rang rat. } \nu_2 \geq 2 + \text{deg.tr.}_{k(\mathfrak{m})} k_{\nu} = \dim R + 1.$$

Cela est une contradiction avec l'inégalité d'Abhyankar [1]. Donc le morphisme  $\widehat{i}$  est injectif.

Soit  $x$  un élément de  $\widehat{R}$ . Posons  $\widehat{\nu}(x) = s$  et  $\widehat{\nu}(\widehat{\mathfrak{m}}) = r_1$ . Pour tout entier naturel  $n > s/r_1$ , il existe un élément  $x'$  appartenant à  $R$  tel que  $x - x' \in \widehat{\mathfrak{m}}^n$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}(x) &= \widehat{\nu}((x - x') + x') \\ &= \widehat{\nu}(x') \\ &= \nu(x') \end{aligned}$$

Donc les valuations  $\nu$  et  $\widehat{\nu}$  ont le même groupe de valeurs (i.e.  $\Gamma_{\nu} = \Gamma_{\widehat{\nu}}$ .) Maintenant, soient  $x$  et  $y \neq 0$  deux éléments appartenant à  $\widehat{R}$  tels que  $x/y \in R_{\widehat{\nu}}$ . Nous pouvons choisir deux éléments  $x'$  et  $y'$  appartenant à  $R$  tels que  $\widehat{\nu}(x - x') > \widehat{\nu}(x)$  et  $\widehat{\nu}(y - y') > \widehat{\nu}(y)$ . Donc  $\widehat{\nu}(x) = \nu(x')$  et  $\widehat{\nu}(y) = \nu(y')$ , par suite  $x'/y' \in R_{\nu}$ . En plus nous avons

$$\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'} = \frac{x - x'}{x} \cdot \frac{x}{y} + \frac{y' - y}{y} \cdot \frac{x'}{y'} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\nu}}$$

ce qui donne que  $\nu$  et  $\widehat{\nu}$  ont le même corps résiduel (i.e.  $k_{\widehat{\nu}} \simeq k_{\nu}$ ). Le fait que  $\dim \widehat{R} = \dim R$  et  $k(\widehat{\mathfrak{m}}) \simeq k(\mathfrak{m})$  entraîne que la restriction de la valuation  $\widehat{\nu}$  au corps de fractions de  $\widehat{R}$ , qu'on note aussi  $\widehat{\nu}$  est une valuation divisorielle centrée dans  $\widehat{R}$  en  $\widehat{\mathfrak{m}}$ , et elle vérifie bien évidemment  $\nu(x) = \widehat{\nu}(x)$  pour tout  $x \in R$ .

Montrons maintenant l'unicité de la valuation  $\widehat{\nu}$ . Soit  $\tilde{\nu}$  une autre valuation divisorielle de  $K(\widehat{R})$  centrée dans  $\widehat{R}$  en  $\widehat{\mathfrak{m}}$  qui vérifie  $\nu(x) = \tilde{\nu}(x)$  pour tout  $x \in R$ . Prenons  $z$  un élément de  $\widehat{R}$ . Soient  $\widehat{\nu}(z) = s_1$ ,  $\tilde{\nu}(z) = s_2$  et  $\tilde{\nu}(\mathfrak{m}) = r_2$ . Alors pour tout entier naturel  $n \geq \sup(s_1/r_1, s_2/r_2)$ , il existe  $z' \in R$  tel que  $z - z' \in \mathfrak{m}^n \widehat{R}$ . Par conséquent  $\widehat{\nu}(z) = \widehat{\nu}(z')$  et  $\tilde{\nu}(z) = \tilde{\nu}(z')$ , et comme  $z' \in R$  et les valuations  $\widehat{\nu}$  et  $\tilde{\nu}$  sont égaux sur  $R$ . Il en résulte que  $\widehat{\nu}(z) = \tilde{\nu}(z)$ .  $\square$

**Lemme 1.10.** — Soient  $(R, \mathfrak{m})$  un anneau noëthérien local intègre analytiquement irréductible et  $\overline{R}$  la normalisation de  $R$ . Alors pour toute valuation divisorielle  $\nu$  de  $R$  centrée en  $\mathfrak{m}$ , il existe une valuation divisorielle  $\overline{\nu}$  de  $\overline{R}$  centrée en  $\overline{\mathfrak{m}}$  (l'idéal maximal de  $\overline{R}^{(1)}$ ), telle que pour tout  $x \in R$ , on a  $\overline{\nu}(x) = \nu(x)$ .

*Démonstration.* — On a bien l'inclusion :

$$R \subseteq \overline{R} \subseteq R_{\nu}.$$

Notons  $\overline{\nu}$  l'extension de  $\nu$  dans  $\overline{R}$ . Puisque  $R$  est analytiquement irréductible, l'anneau  $\overline{R}$  est local et  $\overline{\mathfrak{m}}$  est son idéal maximal (cf. [8]). La valuation  $\overline{\nu}$  est donc centrée dans  $\overline{R}$  en  $\overline{\mathfrak{m}}$ . De plus, comme  $\nu$  est divisorielle,

$$\text{ht } \mathfrak{m} = \text{ht } \overline{\mathfrak{m}}$$

<sup>(1)</sup> Sous les hypothèses de ce lemme, la normalisation de  $R$  est anneau local (cf. [8]), Proposition 2.14, (c), page 344).