Astérisque
346, 2012, p. 171–311

UNE FORMULE INTÉGRALE RELIÉE À LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD, 2e PARTIE : EXTENSION AUX REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES

par

Jean-Loup Waldspurger

Résumé. — Soit V un espace vectoriel sur un corps p-adique F, soit q une forme quadratique non-dégénérée sur V et soit D une droite non isotrope de V. Notons W l'hyperplan orthogonal à D, G et H les groupes spéciaux orthogonaux de V et W. Soient π, resp. ρ, une représentation admissible et irréductible de $G(F)$, resp. $H(F)$. La représentation ρ apparaît comme quotient de la restriction de π à $H(F)$ avec une certaine multiplicité $m(\pi,\rho)$. On sait que $m(\pi,\rho) \leq 1$. Dans un article précédent, sous l'hypothèse que π était supercuspidale, nous avons prouvé une formule qui calculait $m(\pi,\rho)$ comme une intégrale de fonctions déduites des caractères de π et ρ. Ici, nous prouvons la même formule sous l'hypothèse que π et ρ sont toutes deux tempérées. Nous imitons la preuve de la formule des traces locale d'Arthur. En supposant vérifiées les propriétés attendues des L-paquets, nous prouvons grâce à notre formule une version faible de la conjecture locale de Gross-Prasad pour les L-paquets tempérés.

Abstract **(Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups)**

Let V be a vector space over a p-adic field F, let q be a non-degenerate quadratic form over V and let D be a non-isotropic line in V. Denote W the hyperplane orthogonal to D, G and H the special orthogonal groups of V and W. Let π, resp. ρ, be an irreducible admissible representation of $G(F)$, resp. $H(F)$. The representation ρ appears as a quotient of the restriction of π to $H(F)$ with a certain multiplicity $m(\pi,\rho)$. We know that $m(\pi,\rho) \leq 1$. In a preceding paper, assuming that π was supercuspidal, we have proved a formula that computes $m(\pi,\rho)$ as an integral of functions deduced from the characters of π and ρ. Here, we prove the same formula for π and ρ tempered. We follow the proof due to Arthur of the local trace formula. Using our formula and assuming some usual properties of L-packets, we prove a weak form of the local Gross-Prasad conjecture for tempered L-packets.

Introduction

Cet article fait suite à [**17**]. Rappelons les définitions des principaux objets. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Soit (V, q_V) un espace

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 11S37, 22E50.
Mots clefs. — Représentations tempérées; groupes spéciaux orthogonaux; conjecture locale de Gross-Prasad.

quadratique, c'est-à-dire que V est un espace vectoriel de dimension finie sur F et q_V est une forme quadratique non dégénérée sur V. Soit (W, q_W) un autre espace quadratique. On suppose que l'on a une décomposition orthogonale $V = W \oplus D_0 \oplus Z$, où D_0 est une droite et Z est muni d'une base $\{v_i; i = \pm 1, \dots, \pm r\}$ telle que $q_V(v_i, v_j) = \delta_{i,-j}$ pour tous i, j. On note G et H les groupes spéciaux orthogonaux de V et W, que l'on considère comme des groupes algébriques définis sur F. Le groupe H se plonge naturellement dans G. Introduisons le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fv_r \subset Fv_r \oplus Fv_{r-1} \subset \cdots \subset Fv_r \oplus \cdots \oplus Fv_1.$$

Notons U son radical unipotent. Fixons un élément non nul $v_0 \in D_0$ et un caractère continu non trivial ψ de F. On définit un caractère ξ de $U(F)$ par l'égalité

$$\xi(u) = \psi\left(\sum_{i=0,\dots,r-1} q_V(uv_i, v_{-i-1})\right).$$

Soient π, resp. ρ, une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $H(F)$, dans un espace complexe E_π, resp. E_ρ. On note $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \rho)$ l'espace des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que

$$\varphi(\pi(hu)e) = \xi(u)\rho(h)\varphi(e)$$

pour tous $u \in U(F)$, $h \in H(F)$, $e \in E_\pi$. On note $m(\rho, \pi)$ la dimension de cet espace. D'après [**1**, théorème 1′] et [**8**, corollaire 15.2], ce nombre vaut 0 ou 1. Il est indépendant des divers choix effectués.

Supposons G et H quasi-déployés sur F et affectons les notations d'un indice i : V_i, G_i etc. Supposons pour cette introduction $dim(W_i) \geq 3$. A équivalence près, il y a un unique espace quadratique que nous notons (V_a, q_{V_a}) tel que $dim(V_a) = dim(V_i)$, que les discriminants de q_{V_i} et q_{V_a} soient égaux mais leurs indices de Witt soient distincts. On introduit de même un espace quadratique (W_a, q_{W_a}). Le couple (V_a, W_a) vérifie les mêmes propriétés que (V_i, W_i) : à isomorphisme près, on a encore l'égalité $V_a = W_a \oplus D_0 \oplus Z$, avec les mêmes D_0 et Z que ci-dessus. Les groupes spéciaux orthogonaux G_a, resp. H_a, de V_a, resp. W_a, sont des formes intérieures de G_i, resp. H_i. On note $\mathrm{Temp}(G_i)$, $\mathrm{Temp}(G_a)$ etc. les ensembles de représentations tempérées et irréductibles de $G_i(F)$, $G_a(F)$ etc. On admet que ces ensembles sont unions disjointes de L-paquets vérifiant certaines propriétés encore conjecturales. Précisément on admet les propriétés (1), (2) et (3) de [**17**] 13.2. Soient Π_i, resp. Σ_i, un L-paquet dans $\mathrm{Temp}(G_i)$, resp. $\mathrm{Temp}(H_i)$. Il peut correspondre à Π_i un L-paquet dans $\mathrm{Temp}(G_a)$, que l'on note Π_a. Ou bien il n'y a pas de tel L-paquet et on pose $\Pi_a = \varnothing$. On définit de même Σ_a. La multiplicité $m(\rho, \pi)$ est bien définie pour tout $(\rho, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$.

Théorème. — *Sous ces hypothèses, il existe un unique couple* $(\rho, \pi) \in (\Sigma_i \times \Pi_i) \cup (\Sigma_a \times \Pi_a)$ *tel que* $m(\rho, \pi) = 1$.

C'est une partie de la conjecture 6.9 de [**10**]. Ce théorème résulte aisément d'une formule qui calcule $m(\rho, \pi)$ comme une somme d'intégrales de fonctions qui se déduisent des caractères de ρ et π. Plus précisément, revenons aux notations sans indices du début de cette introduction. Soient π et ρ des représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ et $H(F)$. On introduit une expression $m_{\text{géom}}(\rho,\pi)$ pour la définition de laquelle on renvoie à l'introduction de [**17**].

Théorème. — *Supposons π et ρ tempérées et irréductibles. Alors on a l'égalité $m(\rho,\pi)=m_{\text{géom}}(\rho,\pi)$.*

Cf. 7.1. Dans [**17**], on avait démontré cette égalité sous les hypothèses que π était cuspidale et ρ admissible. Ici, on élargit l'hypothèse sur π qui n'est plus que tempérée. Par contre, on impose une hypothèse plus forte à ρ qui est elle-aussi tempérée. Comme dans [**17**], le second théorème implique le premier. Evidemment, dans [**17**], l'hypothèse de cuspidalité présente dans le second théorème se retrouvait dans le premier. C'est cette hypothèse que nous faisons disparaître dans le présent article.

Décrivons l'idée principale de la preuve du second théorème. Rappelons que, pour une fonction $f\in C_c^\infty(G(F))$, on dit que f est très cuspidale si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique propre $P'=M'U'$ de G (avec une notation familière) et pour tout $m'\in M'(F)$, on a l'égalité

$$\int_{U'(F)} f(m'u')du'=0.$$

Soient $\rho\in\mathrm{Temp}(H)$ et f une fonction très cuspidale sur $G(F)$. On note θ_ρ le caractère de ρ. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on introduit une fonction κ_N sur $G(F)$ qui est la fonction caractéristique de l'image réciproque d'un sous-ensemble compact de $H(F)U(F)\backslash G(F)$ qui est de plus en plus grand quand N tend vers l'infini. Posons

$$J_N(\theta_\rho,f)=\int_{H(F)U(F)\backslash G(F)}\int_{H(F)}\int_{U(F)}\theta_\rho(h)f(g^{-1}hug)\xi(u)\kappa_N(g)du\,dh\,dg.$$

On montre que, quand N tend vers l'infini, cette expression a une limite. En fait, et c'est cela qui est fructueux, il y a deux façons de calculer la limite. L'une, que l'on peut qualifier de géométrique, a été développée en [**17**], et conduit à une égalité

$$\lim_{N\to\infty}J_N(\theta_\rho,f)=J_{\text{géom}}(\theta_\rho,f),$$

où le membre de droite est une somme d'intégrales sur certains sous-tores de $H(F)$. Dans le présent article, on calcule la limite d'une autre façon, que l'on peut qualifier de spectrale. On obtient une égalité (cf. théorème 6.1) :

$$\lim_{N\to\infty}J_N(\theta_\rho,f)=J_{\text{spec}}(\theta_\rho,f),$$

où

$$J_{\text{spec}}(\theta_\rho,f)=\sum_{L\in\mathcal{L}(M_{\min})}|W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_L}\sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(L)\};m(\mathcal{O},\rho)=1}$$

$$[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee:i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}t(\pi)^{-1}\int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*}J_L^G(\pi_\lambda,f)d\lambda.$$

Tous les termes de cette formule seront définis dans l'article. Disons simplement ici que, dans le cas où $L = G$, les objets $\mathcal{O}$ sont simplement les représentations irréductibles tempérées et elliptiques de $G(F)$ et, si l'on pose plus simplement $\pi = \mathcal{O}$, la condition $m(\mathcal{O}, \rho) = 1$ n'est autre que $m(\rho, \pi) = 1$ tandis que $J_G^G(\pi, f) = \theta_\pi(f)$. Pour L quelconque, π est un élément fixé dans $\mathcal{O}$ et $J_L^G(\pi_\lambda, f)$ est la valeur sur f du caractère pondéré associé à π_λ.

On a donc l'égalité

$$J_{\text{géom}}(\theta_\rho, f) = J_{\text{spec}}(\theta_\rho, f)$$

qui, bien sûr, rappelle fortement la formule des traces locale d'Arthur. De fait, la preuve reprend très largement celle de [**6**]. Dans les deux membres de la formule apparaissent des distributions qui ne sont pas invariantes : intégrales orbitales pondérées et caractères pondérés. Le procédé mis au point par Arthur, appliqué en particulier dans [**7**] à la formule des traces locale, permet de transformer la formule ci-dessus en une autre où n'apparaissent que des distributions invariantes. Le terme de droite de cette formule continue de distinguer les représentations π de $G(F)$ telles que $m(\rho, \pi) = 1$. Pour une représentation π de la série discrète, ou plus généralement pour π elliptique au sens de [**7**], le second théorème résulte facilement de cette formule « invariante » appliquée à un pseudo-coefficient de π. En étudiant le comportement des deux membres de l'égalité à démontrer relativement à l'induction en la variable π, le cas général se déduit de celui où π est elliptique par récurrence sur les dimensions de V et W.

Expliquons encore deux points. Dans la formule non invariante, la fonction f est supposée très cuspidale, ce qui est assez restrictif. Cela parce que nous ne savons pas calculer la limite de $J_N(\theta_\rho, f)$ pour une fonction qui ne vérifie pas cette hypothèse (le résultat rend d'ailleurs douteuse la possibilité d'étendre nos calculs à des fonctions ne vérifiant pas cette hypothèse). Mais, une fois la formule rendue invariante, on peut supposer f seulement cuspidale (c'est-à-dire les intégrales orbitales $J^G(x, f)$ sont nulles pour tout élément $x \in G(F)$ qui est semi-simple, fortement régulier et non elliptique). Cela résulte du lemme suivant (lemme 2.7).

Lemme. — *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$ une fonction cuspidale. Alors il existe une fonction très cuspidale $f' \in C_c^\infty(G(F))$ telle que $D(f) = D(f')$ pour toute distribution D sur $G(F)$ invariante par conjugaison.*

Cet affaiblissement de la condition sur f est nécessaire pour achever la preuve (on prend pour f un pseudo-coefficient d'une représentation irréductible, tempérée et elliptique).

Le deuxième point est l'apparition de la condition $m(\rho, \pi) = 1$ dans le terme $J_{\text{spec}}(\theta_\rho, f)$. Fixons ici une représentation $\pi \in \text{Temp}(G)$. L'espace $\text{Hom}_{H,\xi}(\pi, \rho)$ dont $m(\rho, \pi)$ est la dimension est défini de façon abstraite. Il ne peut pas intervenir directement dans $J_{\text{spec}}(\theta_\rho, f)$ qui est une intégrale explicite. Ce qui intervient dans ce terme, c'est la forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ sur $E_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\pi$ définie par

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon' \otimes e', \varepsilon \otimes e) = \int_{H(F)U(F)} (\rho(h)\varepsilon', \varepsilon)(e', \pi(hu)e)\bar{\xi}(u)du\, dh,$$

pour $\varepsilon, \varepsilon' \in E_\rho$ et $e, e' \in E_\pi$ (les produits $(.,)$ sont des produits hermitiens invariants sur E_ρ et E_π). L'intégrale ci-dessus n'est pas absolument convergente, mais on peut la définir comme une limite d'intégrales absolument convergentes, cf. 5.1. Négligeons cette question de convergence. Fixons ε et e'. Définissons une application $l : E_\pi \to E_\rho$ par l'égalité $(\varepsilon', l(e)) = \mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon' \otimes e', \varepsilon \otimes e)$ pour tous $\varepsilon' \in E_\rho$ et $e \in E_\pi$. On vérifie que $l \in \mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \rho)$. Si $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ n'est pas nulle, cet espace $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \rho)$ ne l'est pas non plus et $m(\rho, \pi) = 1$. On a besoin de la réciproque, qui s'avère vraie.

Proposition. — *Soient $\pi \in \mathrm{Temp}(G)$ et $\rho \in \mathrm{Temp}(H)$. Alors $m(\rho, \pi) = 1$ si et seulement si la forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ est non nulle.*

Cf. proposition 5.7. Signalons que cette façon concrète de construire l'espace $\mathrm{Hom}_{H,\xi}(\pi, \rho)$ se trouve déjà dans l'article [**13**] de Ikeda et Ichino.

La première section est consacrée aux notations et à des rappels sur les opérateurs d'entrelacement et la formule de Plancherel. La deuxième l'est aux propriétés des fonctions cuspidales ou très cuspidales et aux quasi-caractères qu'elles permettent de définir. Les sections 3 et 4 sont franchement pénibles. On y démontre diverses majorations nécessaires pour la suite (pour le groupe GL_k dans la section 3, pour un groupe spécial orthogonal dans la section 4). On s'inspire ici plus que largement des travaux d'Harish-Chandra. Signalons à ce propos que l'on fait constamment référence à l'article [**16**]. Mais l'apparence est trompeuse puisque dans [**16**], on s'était contenté de rédiger des résultats non publiés d'Harish-Chandra. D'autre part, dans [**16**], on avait cru judicieux de modifier la définition de l'homomorphisme habituel H_G en y glissant un signe $-$. On persiste à penser que, sur un corps de base p-adique, c'est une meilleure définition. Mais, pour utiliser les résultats d'Arthur, il vaut mieux reprendre ses définitions. C'est ce que l'on fait, mais cela induit des changements de signe dans les références que l'on fera à [**16**] : cela échange une chambre positive avec son opposée. La section 5 est consacrée à la définition et l'étude des formes sesquilinéaires $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ évoquées ci-dessus. La preuve de l'égalité $\lim_{N\to\infty} J_N(\theta_\rho, f) = J_{\mathrm{spec}}(\theta_\rho, f)$ se trouve dans la section 6. Il s'agit pour l'essentiel de recopier [**6**]. On en déduit dans la section 7 les deux théorèmes énoncés ci-dessus.

Je remercie le rapporteur pour ses remarques et suggestions, et pour le tact avec lequel il les a faites.

1. Notations et rappels

1.1. Notations générales. — On utilise les notations introduites dans [**17**], qui sont la plupart du temps celles d'Arthur et d'Harish-Chandra. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathfrak{o}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$, q le nombre d'éléments du corps résiduel, val_F et $|.|_F$ les valuation et valeur absolue usuelles et on fixe une uniformisante ϖ_F. Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On note A_G le plus grand